Dănuț Jemna Carmen Pintilescu Ciprian Turturean
Viorica Chirilă Ciprian Chirilă Daniela Viorică

ECONOMETRIE

Probleme şi teste grilă

III 302.426

Editura SEDCOM LIBRIS

BCU "MIHAI EMINESCU" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BIBL. CENTR. UNIV.
„M. EMINESCU" IAŞI
III 302. 426

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ECONOMETRIE

Probleme şi teste grilă

editura
sedcom
libris

Cartea este o pasiune,
iar pasiunea se împarte...

BCU IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Referenți științifici:
Prof. univ. dr. Liviu-Stelian BEGU
Academia de Studii Economice Bucureşti

Prof. univ. dr. Tudorel ANDREI
Academia de Studii Economice Bucureşti

Redactori: Petru RADU, Alina HUCAI
Concepția şi realizarea tehnică a copertei: Iulia ANTONIADE

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

Econometrie: probleme şi teste grilă / Dănuț Jemna, Carmen Pintilescu, Ciprian Turturean, ... – Iaşi: Sedcom Libris, 2009
I.S.B.N.: 978-973-670-344-7

I. Jemna, Dănuț
II. Pintilescu, Carmen
III. Turturean, Ciprian Ionel

330.43

Editura Sedcom Libris este acreditată de Consiliul Național al Cercetării Ştiințifice din Învățământul Superior (C.N.C.S.I.S.).

Copyright © 2009 SEDCOM LIBRIS
Toate drepturile asupra prezentei ediții sunt rezervate Editurii Sedcom Libris, Iaşi.
Reproducerea parțială sau integrală a textelor, prin orice mijloc,
precum şi a graficii copertei, fără acordul scris al Editurii Sedcom Libris,
este interzisă şi se va pedepsi conform legislației în vigoare.

Adresa Editurii: Şos. Moara de Foc nr. 4, cod 700527, Iaşi, România
Contact Editura:
Tel.: +40.232.242.877; 234.582; 0742.76.97.72; fax: 0232.233.080
www.editurasedcomlibris.ro; e-mail: editurasedcomlibris@yahoo.com

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dănuț Jemna Carmen Pintilescu Ciprian Turturean
Viorica Chirilă Ciprian Chirilă Daniela Viorică

55#393

ECONOMETRIE

Probleme şi teste grilă

ALE

474151
B.C.U. IAŞI

Editura SEDCOM LIBRIS
Iaşi, 2009

BCU IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2. FEB. 2011

CUPRINS

Cuvânt înainte 7

1. MODELUL DE REGRESIE LINIARĂ SIMPLĂ 9
1.1. ESTIMAREA ŞI TESTAREA PARAMETRILOR MODELULUI 10
1.1.1. Probleme rezolvate 10
1.1.2. Teste grilă 21
1.2. ESTIMAREA ŞI TESTAREA INDICATORILOR DE CORELAŢIE 28
1.2.1. Probleme rezolvate 28
1.2.2. Teste grilă 37

2. MODELUL DE REGRESIE LINIARĂ MULTIPLĂ 43
2.1. ESTIMAREA ŞI TESTAREA PARAMETRILOR MODELULUI 44
2.1.1. Probleme rezolvate 45
2.1.2. Teste grilă 53
2.2. ESTIMAREA ŞI TESTAREA INDICATORILOR DE CORELAŢIE MULTIPLĂ 61
2.2.1. Probleme rezolvate 62
2.2.2. Teste grilă 74

3. MODELUL DE REGRESIE NELINIARĂ 81
3.1. MODELE LINIARIZABILE 82
3.1.1. Probleme rezolvate 82
3.1.2. Teste grilă 98
3.2. MODELE POLINOMIALE 111
3.2.1. Probleme rezolvate 111
3.2.2. Teste grilă 121

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

4. MODELE DE REGRESIE CU VARIABILE ALTERNATIVE 127
4.1. MODELE DE REGRESIE ANOVA 128
4.1.1. Probleme rezolvate 129
4.1.2. Teste grilă 134
4.2. MODELE DE REGRESIE ANCOVA 143
4.2.1. Probleme rezolvate 143
4.2.2. Teste grilă 149

5. VERIFICAREA IPOTEZELOR MODELULUI CLASIC DE REGRESIE 161
5.1. IPOTEZE CU PRIVIRE LA ERORI 162
5.1.1. Probleme rezolvate 162
5.1.2. Teste grilă 178
5.2. IPOTEZE CU PRIVIRE LA VARIABILELE INDEPENDENTE 187
5.2.1. Probleme rezolvate 187
5.2.2. Teste grilă 190

6. MODELAREA SERIILOR DE TIMP 195
6.1. COMPONENTELE UNEI SERII DE TIMP 196
6.1.1. Probleme rezolvate 196
6.1.2. Teste grilă 200
6.2. METODE ELEMENTARE DE AJUSTARE A TRENDULUI 204
6.2.1. Probleme rezolvate 205
6.2.2. Teste grilă 212
6.3. METODE ANALITICE DE AJUSTARE A TRENDULUI 216
6.3.1. Probleme rezolvate 216
6.3.2. Teste grilă 228

TABELE PROBABILISTE 235

BIBLIOGRAFIE 245

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cuvânt înainte

Econometria este o disciplină metodologică şi cu un caracter puternic aplicativ. Construirea modelelor econometrice presupune cunoaşterea teoriei economice care explică mecanismele de realizare a fenomenelor studiate, precum şi a metodelor şi modelelor matematice care permit instrumentarea relaţiei dintre fenomene. Pentru a atinge obiectivul principal al econometriei, este foarte important să se cunoască paşii unui demers al cercetării şi problemele pe care le ridică fiecare etapă a procesului de modelare, de la alegerea variabilelor şi până la testarea modelului construit.

Lucrarea de faţă vine în întâmpinarea unei asemenea nevoi de ordin metodologic şi are un caracter didactic. Sunt puse la dispoziţia cititorului o serie de aplicaţii punctuale care concordă cu probleme punctuale din demersul modelării econometrice, aşa cum sunt, de exemplu: analiza grafică a seriilor empirice de date, identificarea unui model de regresie, estimarea parametrilor, testarea parametrilor modelului, analiza de corelaţie, testarea ipotezelor modelului clasic de regresie etc. Alături de aplicaţii, în lucrare, sunt prezentate o serie de teste grilă care au rolul de a ajuta cititorul (ne referim aici, în special, la studenţi, dar nu numai) să-şi evalueze cunoştinţele de econometrie dobândite.

În conformitate cu obiectivul propus, lucrarea este structurată pe şase capitole. Capitolele 1 – 4 prezintă aplicaţii şi teste grilă pe tipuri de modele de regresie: modelul liniar simplu, modelul liniar multiplu, modele neliniare şi modele cu variabile alternative. În capitolul 5 sunt prezentate aplicaţii şi teste grilă privitoare la etapa testării ipotezelor modelului clasic de regresie, ipoteze cu privire la erori şi la variabilele independente. În ultimul capitol, sunt prezentate probleme şi teste grilă specifice modelării seriilor de timp.

Lucrarea se adresează, în special, studenţilor de la facultăţile de economie. Urmând logica cursului de Econometrie, studenţii au la îndemână, prin această lucrare, un instrument util în pregătirea lor didactică şi profesională.

Autorii,

Iaşi, octombrie 2009

BCU IAŞI - BIBLIOTECA UNIVERSITARĂ

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul 1

MODELUL DE REGRESIE LINIARĂ SIMPLĂ

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI

1.	Estimarea și testarea parametrilor modelului
	Probleme rezolvate
	Teste grilă
2.	Estimarea și testarea indicatorilor de corelație
	Probleme rezolvate
	Teste grilă

În acest capitol, sunt prezentate probleme rezolvate și teste grilă care privesc modelarea fenomenelor economice, cu ajutorul modelului de regresie liniară simplă.

BCU IAȘI CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

1.1. Estimarea şi testarea parametrilor modelului

Modelul liniar simplu presupune existenţa unei legături liniare între două variabile – o variabilă dependentă şi una independentă. La nivelul unei populaţii, dependenţa liniară dintre cele două variabile se exprimă matematic printr-o funcţie de gradul întâi:

$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$, unde:

- Y este *variabila dependentă*;
- X este *variabila independentă*;
- ε este *variabila aleatoare eroare* sau *reziduu*;
- β_0, β_1 sunt *parametrii* modelului de regresie.

Parametrii ecuaţiei de regresie sunt estimaţi, punctual şi prin interval de încredere, prin metoda celor mai mici pătrate.

1.1.1. Probleme rezolvate

Problema 1

În studiul legăturii dintre variabilele *Venitul lunar al unei gospodării (mii Lei)* şi *Cheltuielile lunare ale gospodăriei (Lei)*, pentru un eşantion de 6 gospodării, s-au înregistrat următoarele valori:

Tabelul 1.1. *Veniturile şi cheltuielile lunare înregistrate pentru un eşantion de 6 gospodării*

Venituri lunare (mii Lei) *(X)*	Cheltuieli lunare (Lei) *(Y)*
3	12
4	25
6	40
4	35
7	50
8	65

Sursa: *Date convenţionale*

BCU IAŞI CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

Se cere să se estimeze punctual și prin interval de încredere parametrii modelului de regresie. Se consideră un nivel de încredere de 95%.

Rezolvare

Estimarea punctuală a parametrilor modelului de regresie

Punctual, parametrii de regresie se estimează pe baza următoarelor relații:

$$b_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Elementele de calcul necesare pentru calculul estimațiilor parametrilor de regresie sunt prezentate în tabelul 1.2.

Tabelul 1.2. *Elemente de calcul*

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2	$y_{x_i} = -10{,}5 + 9{,}06 \cdot x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	e_i	e_i^2
3	12	9	36	144	16,65	-2,33	5,43	-4,65	21,62
4	25	16	100	625	25,71	-1,33	1,77	-0,71	0,5
6	40	36	240	1600	43,83	0,67	0,44	-3,83	14,67
4	35	16	140	1225	25,71	-1,33	1,76	9,29	86,3
7	50	49	350	2500	52,89	1,67	2,78	-2,89	8,35
8	65	64	520	4225	61,95	2,67	7,13	3,05	9,3
32	227	190	1386	10319	226,74	-	19,33	-	140,75

Înlocuind în relațiile de mai sus, se obține:

$$b_0 = \frac{227 \cdot 190 - 32 \cdot 1386}{6 \cdot 190 - 32^2} = -\frac{1222}{116} = -10{,}5$$

$$b_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{6 \cdot 1386 - 32 \cdot 227}{6 \cdot 190 - 32^2} = \frac{1052}{116} = 9{,}06$$

Estimația parametrului β_0 se poate calcula și pe baza următoarei relații de calcul:

$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 37{,}83 - 9{,}06 \cdot 5{,}33 = -10{,}5$; unde

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{227}{6} = 37{,}83;$$

BCU IASI - CENTRUL UNIVERSITY LIBRARY

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{32}{6} = 5{,}33.$$

Interpretare

- Pentru β_0: la o valoare a *Venitului* de 0 mii Lei, *Cheltuielile* înregistrează o valoare medie estimată de -10,5 Lei;
- Pentru β_1: la o creştere cu o mie de Lei a *Venitului*, *Cheltuielile* înregistrează o creştere medie de 9,06 Lei.

Estimarea prin interval de încredere a parametrilor modelului de regresie

Intervalele de încredere ale parametrilor modelului se obţin pe baza următoarelor relaţii:

$$[b_0 \pm t_{\alpha/2,n-2} \cdot s_{\hat{\beta}_0}],$$

$$[b_1 \pm t_{\alpha/2,n-2} \cdot s_{\hat{\beta}_1}].$$

Estimaţiile abaterilor standard ale parametrilor β_0 şi β_1 se calculează după relaţiile:

$$s_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{s^2_{\hat{\beta}_0}} = \sqrt{s^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}\right)},$$

$$s_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{s^2_{\hat{\beta}_1}} = \sqrt{\frac{s^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}, \text{ unde:}$$

$$s^2 = \frac{\sum_i e_i^2}{n-2} = \frac{\sum (y_i - y_{x_i})^2}{2} = \frac{\sum_i (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2}{n-2}.$$

Înlocuind cu rezultatele prezentate în tabelul 1.2, se obţine:

$$s^2 = \frac{140{,}75}{4} = 35{,}18;$$

$$s_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{35{,}18\left(\frac{1}{6} + \frac{5{,}33^2}{19{,}33}\right)} = 7{,}59;$$

$$s_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\frac{35{,}18}{19{,}33}} = 1{,}34.$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru un nivel de încredere de 95%, valoarea teoretică a statisticii *Student* este: $t_{\alpha/2,n-2} = t_{0.025,4} = 2{,}776$.

Prin urmare, intervalele de încredere care acoperă parametrii, cu o încredere de 95%, sunt:

- $\beta_0 : [-10{,}53 \pm 2{,}776 \cdot 7{,}59] \Rightarrow [-31{,}6;\ 10{,}54]\ Lei$;
- $\beta_1 : [9{,}06 \pm 2{,}776 \cdot 1{,}34] \Rightarrow [5{,}34;\ 12{,}78]\ Lei$.

Interpretare

- Pentru β_0: se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul β_0 este acoperit de intervalul [*-31,6; 10,54*] Lei;
- Pentru β_1: se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul β_1 este acoperit de intervalul [*5,34; 12,78*] Lei.

Problema 2

În studiul legăturii dintre variabilele *Preţul unui produs* (*X*, Lei) şi *Valoarea lunară a vânzărilor unui produs* (*Y*, mii Lei), pe baza datelor înregistrate pentru un eşantion de 406 unităţi comerciale, s-a obţinut reprezentarea grafică de mai jos.

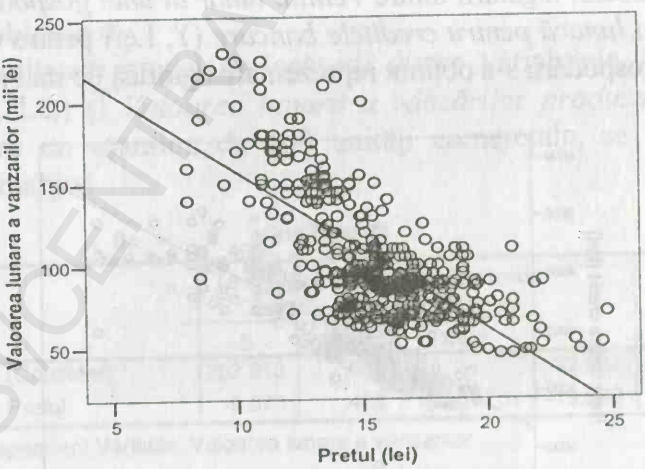


Figura 1.1. *Legătura dintre Preţ şi Valoarea lunară a vânzărilor*
Sursa: *Date convenţionale*

Se cere:

a. să se interpreteze graficul;

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b. să se scrie ecuaţia teoretică care exprimă legătura dintre cele două variabile.

Rezolvare

a. Interpretare grafic

Analizând diagrama prezentată în Figura 1.1, putem afirma că:

- forma norului de puncte sugerează o legătură de tip liniar între cele două variabile;
- creşterile de preţ antrenează reduceri ale valorii lunare a vânzărilor.

Prin urmare, se poate considera că între cele două variabile există o legătură liniară inversă sau negativă.

b. Ecuaţia modelului de regresie

Legătura dintre variabilele considerate poate fi reprezentată printr-un model de regresie liniară de forma:

$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, cu $\beta_1 < 0$, unde:

- *Y* este *Valoarea lunară a vânzărilor*;
- *X* este *Preţul*.

Problema 3

În studiul legăturii dintre *Venitul lunar al unei gospodării* (*X*, mii Lei) şi *Rata lunară pentru creditele bancare* (*Y*, Lei) pentru un eşantion de 400 de gospodării s-a obţinut reprezentarea grafică de mai jos.

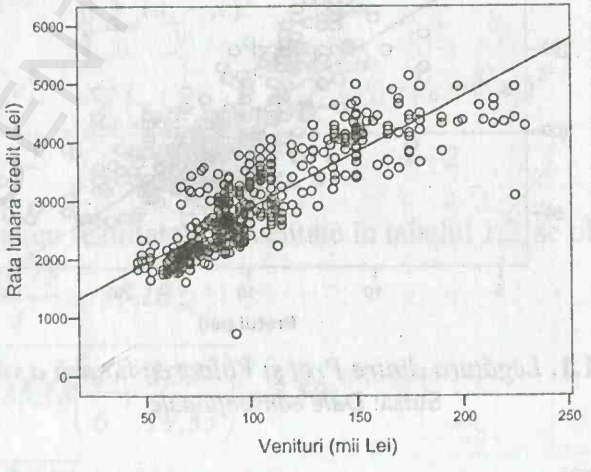


Figura 1.2. *Legătura dintre Venitul lunar şi Rata lunară pentru credite*
Sursa: *Date convenţionale*

BCU IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Se cere:

a. să se interpreteze graficul;

b. să se scrie ecuația teoretică a dreptei care ajustează legătura dintre variabile.

Rezolvare

a. Interpretare grafic

Reprezentarea grafică din Figura 1.2 sugerează existența unei legături de tip liniar între cele două variabile. Creşterea venitului lunar al gospodăriilor atrage după sine o creştere a volumului ratelor lunare pentru creditele bancare ale unei gospodării. Legătura dintre cele două variabile este liniară directă sau pozitivă.

b. Ecuația modelului de regresie

Pentru reprezentarea grafică şi pentru variabilele considerate, modelul de regresie liniar este de forma:

$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, cu $\beta_1 > 0$, unde:

- *Y* este *Rata lunară pentru creditele bancare*;
- *X* este *Venitul lunar al gospodăriei*.

Problema 4

Rezultatele modelării legăturii dintre variabilele *Prețul unui produs* (*X*, Lei) şi *Valoarea lunară a vânzărilor produsului* (*Y*, mii Lei), pentru un eşantion de 400 unități comerciale, se prezintă în tabelul de mai jos.

Coefficients

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	252.913	7.667		32.987	.000
	Pretul	-9.573	.488	-.701	-19.632	.000

a. Dependent Variable: Valoarea lunara a vanzarilor

Sursa: *Date convenționale*

Se cere:

a. să se scrie ecuația modelului estimat;

b. să se interpreteze estimațiile parametrilor modelului.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

a. Ecuaţia modelului estimat

Această ecuaţie se scrie pe baza datelor din tabelul de mai sus, utilizând rezultatele din coloana a doua: *„Unstandardized Coefficients"*, subcoloana *„B"*. Valorile din această coloană reprezintă estimaţii ale parametrilor modelului liniar de forma:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ .$$

Valoarea $b_0 = 252{,}913$ este estimaţia punctuală a parametrului β_0, iar valoarea $b_1 = -9{,}573$ este estimaţia punctuală a parametrului β_1. În concluzie, modelul estimat este:

$$y_{x_i} = 252{,}913 - 9{,}573x_i \ .$$

b. Interpretare estimaţii

Valoarea $b_0 = 252{,}913$ *mii Lei* este valoarea medie estimată a vânzărilor calculată în condiţiile unui preţ teoretic egal cu zero lei.

Valoarea $b_1 = -9{,}573$ *mii Lei* arată că la o creştere cu 1 leu a preţului, valoarea lunară a vânzărilor scade, în medie, cu 9,573 mii lei.

Observaţie. Valoarea obţinută pentru b_0 nu are semnificaţie economică practică deoarece preţul unui produs nu poate fi egal cu zero.

Problema 5

Pentru variabilele *Puterea motorului (X, cai putere)* şi *Greutatea autoturismului (Y, kg)*, înregistrate pentru un eşantion de 409 maşini, s-au obţinut rezultatele din tabelul de mai jos.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
		B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1	(Constant)	983.028	63.324		15.524	.000
	Puterea motorului	19.016	.567	.859	33.535	.000

a. Dependent Variable: Greutatea autoturismului

Sursa: *Prelucrat pe baza datelor din baza de date SPSS Cars*

Se cere:

a. să se scrie ecuaţia modelului estimat;
b. să se interpreteze estimaţiile parametrilor modelului.

BCU "CAROL I" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

a. Ecuația modelului estimat

Această ecuație este de forma:

$y_{x_i} = 983{,}028 + 19{,}016 x_i$, unde:

- *Y* este variabila dependentă, *Greutatea autoturismului*;
- *X* este variabila independentă, *Puterea motorului.*

b. Interpretare estimații

Valoarea b_0 = *983,028 kg* este greutatea medie a autoturismului estimată în condițiile unei puteri a motorului teoretic egală cu zero cai putere (C.P.).

Valoarea b_1 = *19,016 kg* arată că pentru o creștere cu 1 C.P. a *puterii motorului*, *greutatea autoturismului* crește, în medie, cu 19,016 kg.

Problema 6

În urma prelucrării datelor privind legătura dintre variabilele *Prețul unui produs* (*X*, Lei) și *Valoarea lunară a vânzărilor produsului* (*Y*, mii Lei), pentru un eșantion de 400 unități comerciale, s-au obținut rezultatele din tabelul de mai jos.

Coefficients

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
		B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1	(Constant)	252.913	7.667		32.987	.000
	Pretul	-9.573	.488	-.701	-19.632	.000

a. Dependent Variable: Valoarea lunara a vanzarilor

Sursa: *Date convenționale*

Se cere să se estimeze prin interval de încredere parametrii modelului, în condițiile asumării unui nivel de încredere $(1-\alpha)=0{,}90$.

Rezolvare

Intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_0 este definit de relația:

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$[b_0 \pm t_{\alpha/2;n-2} \cdot s_{\hat{\beta}_0}]$, unde:

- b_0=*252,913 mii lei*;
- $t_{\alpha/2;n-2}$ este valoarea teoretică din tabela *Student*. Pentru un α=*0,10* şi *n-2=400-2=398* grade de libertate, valoarea corespunzătoare este: $t_{\alpha/2;n-2} = t_{0,05;398} = 1,645$.
- $s_{\hat{\beta}_0} = 7,667$ *mii Lei* este estimaţia abaterii standard a estimatorului parametrului β_0, care se citeşte din tabelul de rezultate, coloana a treia, *Std. Error*.

În urma calculelor, intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_0 este:

$[252,913 \pm 1,645 \cdot 7,667]$, respectiv $[240,301; 265,525]$.

Interpretare

Se poate garanta cu o probabilitate de 0,90 că parametrul β_0 este acoperit de intervalul $[240,301; 265,525]$ mii lei.

Intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_1 este definit de relaţia:

$[b_1 \pm t_{\alpha/2;n-2} \cdot s_{\hat{\beta}_1}]$, unde:

- b_1=*-9,573* mii Lei;
- $t_{\alpha/2;n-2}$ este valoarea teoretică din tabela *Student*. Pentru un α=*0,10* şi *n-2* grade de libertate, valoarea corespunzătoare este: $t_{\alpha/2;n-2} = t_{0,05;398} = 1,645$;
- $s_{\hat{\beta}_1} = 0,488$ *mii Lei* este estimaţia abaterii standard a estimatorului parametrului β_1.

În urma calculelor, intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_1 este: $[-9,573 \pm 1,645 \cdot 0,488]$, adică [*-10,375;-8,771*].

Interpretare

Se poate garanta cu o probabilitate de 0,90 că parametrul β_1 este acoperit de intervalul [*-10,375; -8,771*] mii lei.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Problema 7

În studiul legăturii dintre două variabile, X (u.m.) și Y (u.m.), modelul estimat pe baza datelor observate pentru un eșantion de volum $n=100$ unități, este de forma: $y_{x_i} = 25 + 3{,}5 \cdot x_i$. Cunoscând valorile estimate ale abaterilor standard ale estimatorilor parametrilor modelului de regresie, $s_{\hat{\beta}_0} = 1{,}56$ *u.m.*, $s_{\hat{\beta}_1} = 0{,}74$ *u.m.*, se cere să se calculeze limitele intervalului de încredere pentru parametrii modelului, pentru un nivel de încredere *1- α=0,95*.

Rezolvare

Intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_0 este definit de relația:

$[b_0 \pm t_{\alpha/2;n-2} \cdot s_{\hat{\beta}_0}]$, unde:

- b_0=25 *u.m.*;
- $t_{\alpha/2;n-2}$ este valoarea teoretică din tabela *Student*. Pentru un α=0,05 și *n-2* grade de libertate, valoarea corespunzătoare este: $t_{\alpha/2;n-2} = t_{0{,}025;100-2} = 1{,}96$.
- $s_{\hat{\beta}_0} = 1{,}56$ u.m.

În urma calculelor, intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_0 este: $[25 \pm 1{,}96 \cdot 1{,}56]$, adică [*21,94;28,05*].

Interpretare

Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul β_0 este acoperit de intervalul [*21,94; 28,05*] u.m.

Intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_1 este definit de relația:

$[b_1 \pm t_{\alpha/2;n-2} \cdot s_{\hat{\beta}_1}]$, unde:

- b_1=3,5 *u.m.*;
- $t_{\alpha/2;n-2}$ este valoarea teoretică care se citește din tabela *Student*. Pentru un α=0,05 și *n-2* grade de libertate, valoarea corespunzătoare este: $t_{\alpha/2;n-2} = t_{0{,}025;98} = 1{,}96$.
- $s_{\hat{\beta}_1} = 0{,}74$ u.m.

În urma calculelor, intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_1 este: $[3{,}5 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}74]$, adică [*2,05;4,95*].

BCU "MIRCEA CEL BĂTRÂN" UNIVERSITY LIBRARY

Interpretare

Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul β_1 este acoperit de intervalul [*2,05; 4,95*] u.m.

Problema 8

În urma prelucrării datelor la nivelul unui eşantion de volum $n=15$ unităţi, pentru două variabile X şi Y, s-a estimat modelul $y_{x_i} = 0,83 + 0,17 \cdot x_i$. Cunoscând valorile estimate ale abaterilor standard ale estimatorilor parametrilor modelului, $s_{\hat{\beta}_0} = 0,1$ şi $s_{\hat{\beta}_1} = 0,04$, se cere să se testeze semnificaţia parametrilor modelului. Se consideră un risc $\alpha=5\%$.

Rezolvare

Formularea ipotezelor

H_o: $\beta_0 = 0$ $(M(Y) = 0 / X = 0)$;

H_1: $\beta_0 \neq 0$ $(M(Y) \neq 0 / X = 0)$.

H_o: $\beta_1 = 0$ *(între cele două variabile, nu există o legătură liniară)*

H_1: $\beta_1 \neq 0$ *(între cele două variabile, există o legătură liniară)*

Alegerea pragului de semnificaţie a testului

$\alpha=0,05$.

Alegerea statisticii test

Se alege statistica *Student*: $t = \dfrac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$, respectiv $t = \dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$.

Valoarea teoretică a statisticii test

$t_{\alpha/2;n-k}$ se citeşte din tabelul Student. Valoarea k reprezintă numărul de parametri ai modelului, iar în cazul modelelor de regresie liniare simple $k=2$. Pentru exemplul dat, considerând un risc α=0,05, se citeşte valoarea $t_{\alpha/2,n-2}=t_{0,025;13}=2,16$.

Calculul statisticii test

Pentru exemplul considerat, valoarea calculată a testului *Student* se obține astfel:

- pentru parametrul β_0 : $t_{calc} = \frac{b_0}{s_{\hat{\beta}_0}} = \frac{0,83}{0,1} = 8,3$;

- pentru parametrul β_1 : $t_{calc} = \frac{b_1}{s_{\hat{\beta}_i}} = \frac{0,17}{0,04} = 4,25$.

Stabilirea regulii de decizie

- dacă $|t_{calc}| \leq t_{\alpha/2;n-2}$, se acceptă ipoteza H_0;

- dacă $|t_{calc}| > t_{\alpha/2;n-2}$, se respinge ipoteza H_0, cu o probabilitate de 0,95.

Interpretarea rezultatelor

- pentru parametrul β_0: $|t_{calc}| = 8,3 > t_{0,025;13} = 2,16$. Acest rezultat permite luarea deciziei de a respinge ipoteza H_0 cu un risc de 0,05. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul β_0 este semnificativ diferit de zero.

- pentru parametrul β_1: $|t_{calc}| = 4,25 > t_{0,025;13} = 2,16$. Acest rezultat permite luarea deciziei de a respinge ipoteza H_0 cu un risc de 0,05. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul β_1 este semnificativ diferit de zero.

1.1.2. Teste grilă

1. În teoria economică clasică, un model de regresie liniară simplă poate fi folosit în studiul legăturii dintre:
a) rata inflației și rata șomajului
b) valoarea consumului și nivelul veniturilor
c) valoarea PIB-ului și speranța de viață

2. Forma generală a modelului de regresie liniară simplă este:
a) $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot \frac{1}{X} + \varepsilon$

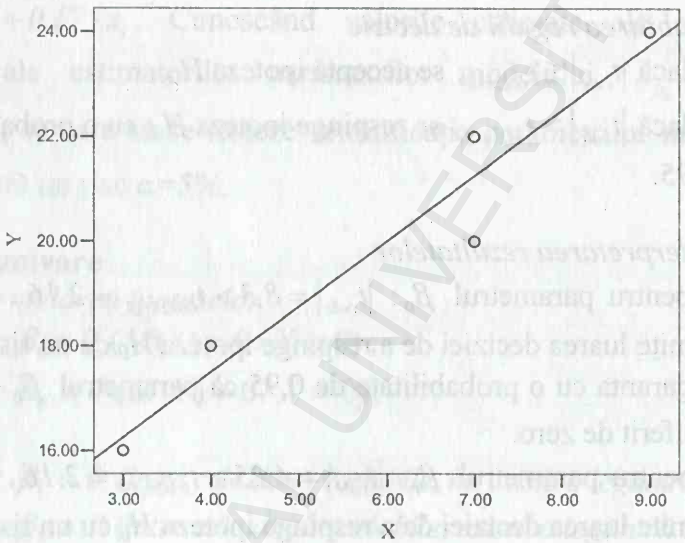
BCU "CAROL I" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X^2 + \varepsilon$

c) $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$

d) $Y = \beta_0 \cdot \beta_1^X \cdot e^{\varepsilon}$

3. Datele privind *Cheltuielile lunare de consum* (*Y*, Lei) şi *Venitul lunar* (*X*, Lei), înregistrate pentru 5 gospodării, sunt reprezentate în figura de mai jos:



Pentru exemplul dat, sunt corecte afirmaţiile:

a) legătura dintre cele două variabile poate fi explicată printr-un model de regresie liniar

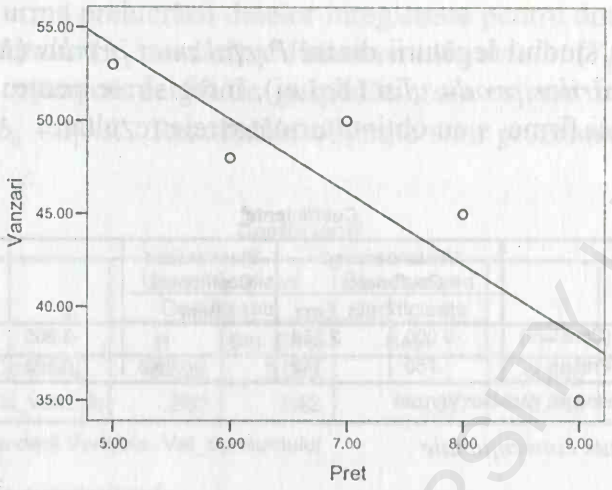
b) legătura dintre cele două variabile este directă

c) legătura dintre cele două variabile este inversă

d) parametrul β_1 din modelul de regresie este pozitiv

4. Datele privind *Preţul unui produs* (*X*, Lei) şi *Valoarea vânzărilor produsului* (*Y*, Lei), înregistrate pentru 5 puncte de lucru ale unei firme, sunt reprezentate în figura de mai jos:

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



Pentru exemplul dat, sunt corecte afirmațiile:
a) legătura dintre cele două variabile poate fi explicată printr-un model de regresie liniar
b) legătura dintre cele două variabile este directă
c) legătura dintre cele două variabile este inversă
d) panta dreptei de regresie este negativă

5. În studiul legăturii dintre *Valoarea venitului* (X, mii Lei) și *Valoarea consumului* (Y, mii Lei), pentru datele înregistrate la nivelul a 50 de gospodării, s-au obținut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
		B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1	(Constant)	-5.599	2.085		-2.686	.055
	Val_venitului	.280	.042	.957	6.603	.003

a. Dependent Variable: Val_consumului

Sursa: *Date convenționale*

Pentru exemplul considerat, modelul estimat al legăturii dintre cele două variabile este de forma:
a) $Y_x = -5{,}599 + 0{,}958 \cdot X$
b) $Y_x = -5{,}599 + 0{,}280 \cdot X$
c) $Y_x = 0{,}280 - 5{,}599 \cdot X$

BCU IASI CENTRUL UNIVERSITY LIBRARY

6. În studiul legăturii dintre *Preţul unui produs* (*X*, Lei) şi *Valoarea vânzărilor produsului* (*Y*, Lei), înregistrate pentru 5 puncte de lucru ale unei firme, s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-9.000	2.258		-3.985	.028
	Pret	.750	.112	.968	6.708	.007

a. Dependent Variable: Vanzari

Sursa: *Date convenţionale*

Valorile estimate ale parametrilor modelului liniar simplu arată că:
a) *Valoarea vânzărilor* scade, în medie, cu 9 Lei la o creştere cu 1 Leu a *Preţului*
b) *Valoarea vânzărilor* creşte, în medie, cu 0.75 Lei la o creştere cu 1 Leu a *Preţului*
c) *Preţul* creşte, în medie, cu 0,75 Lei la o creştere cu 1 Leu a *Valorii vânzărilor*
d) între cele două variabile există o legătură inversă

7. În studiul legăturii dintre *Preţul unui produs* (*X*, Lei) şi *Valoarea vânzărilor produsului* (*Y*, Lei), înregistrate pentru 5 puncte de lucru ale unei firme, s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-9.000	2.258		-3.985	.028
	Pret	.750	.112	.968	6.708	.007

a. Dependent Variable: Vanzari

Sursa: *Date convenţionale*

Valoarea estimată a parametrului β_0 arată că:
a) *Valoarea vânzărilor* scade, în medie, cu 9 Lei la o creştere cu 1 Leu a *Preţului*
b) între cele două variabile există o legătură inversă
c) pentru un *Preţ* de 0 Lei, *Valoarea vânzărilor* este estimată la o valoare medie de -9 Lei

8. În urma prelucrării datelor înregistrate pentru două variabile, *Valoarea venitului* (X, mii Lei) şi *Valoarea consumului* (Y, mii Lei), la nivelul unui eşantion de 50 de gospodării, s-a estimat un model de forma $Y_x = b_0 + b_1 \cdot X$. Rezultatele obţinute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
		B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1	(Constant)	-5.599	2.085		-2.686	.055
	Val_venitului	.280	.042	.957	6.603	.003

a. Dependent Variable: Val_consumului

Sursa: *Date convenţionale*

Pentru un nivel de încredere de 0,95, limitele intervalului de încredere pentru parametrul β_1 sunt:

a) [*0,19; 0,36*]
b) [*0,87; 1,03*]
c) [*0,003; 6,603*]

9. În testarea ipotezelor statistice formulate asupra parametrilor modelului de regresie care explică legătura dintre *Valoarea venitului* (X, mii Lei) şi *Valoarea consumului* (Y, mii Lei), înregistrate la nivelul unui eşantion de 50 de gospodării, s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
		B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1	(Constant)	-5.599	2.085		-2.686	.055
	Val_venitului	.280	.042	.957	6.603	.003

a. Dependent Variable: Val_consumului

Sursa: *Date convenţionale*

Forma generală a modelului estimat este $Y_x = b_0 + b_1 \cdot X$. Pentru rezultatele obţinute, cu un risc asumat de 0,05, se poate considera că:
a) parametrul β_0 este semnificativ diferit de zero, cu o probabilitate de 0,95

BCU IAŞI - CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

b) parametrul β_0 nu este semnificativ diferit de zero, cu o probabilitate de 0,95
c) parametrul β_1 este semnificativ diferit de zero, cu un risc de 0,95

10. Pentru un model de regresie de forma $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \varepsilon$, estimarea parametrilor se realizează pe baza criteriului:
a) $\sum \hat{\varepsilon}_i = \min$
b) $\sum \left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)^2 = \min$
c) $\sum \left(y_i - \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i\right)^2 = \min$

11. Pentru un model de regresie de forma: $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \varepsilon$, parametrul β_0 arată:
a) valoarea medie a variabilei dependente *Y*, la o valoare a variabilei independente *X=0*
b) valoarea medie a variabilei independente *X*, la o valoare a variabilei dependente *Y=0*
c) variaţia medie a variabilei dependente *Y* la o creştere cu o unitate a variabilei independente *X*

12. Pentru un model de regresie de forma $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \varepsilon$, parametrul β_1 arată:
a) valoarea medie a variabilei dependente *Y*, la o valoare a variabilei independente *X=0*
b) de câte ori variază, în medie, variabila dependentă *Y* la o creştere cu o unitate a nivelului variabilei independente *X*
c) cu cât variază, în medie, nivelul variabilei dependente *Y* la o creştere cu o unitate a nivelului variabilei independente *X*

13. Semnul parametrului β_1 al modelului de regresie de forma $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \varepsilon$ arată:
a) sensul legăturii dintre cele două variabile
b) intensitatea legăturii dintre cele două variabile
c) reprezentativitatea legăturii dintre cele două variabile

BCU "Ovidius" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezultate pentru testele grilă

Număr test	Răspunsuri corecte
1	b
2	c
3	a, b, d
4	a, c, d
5	b
6	b
7	c
8	a
9	b
10	b
11	a
12	c
13	a

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.2. Estimarea și testarea indicatorilor de corelație

Pentru a măsura intensitatea legăturii dintre două variabile, se pot utiliza patru indicatori de corelație:

- Coeficientul de corelație (parametrul ρ, respectiv estimația r);
- Raportul de corelație (parametrul η, respectiv estimația R);
- Raportul de determinație (parametrul η^2, respectiv estimația R^2);
- Raportul de determinație ajustat (parametrul $\overline{\eta}^2$, respectiv estimația $\overline{R}^2$).

1.2.1. Probleme rezolvate

Problema 1

În studiul legăturii dintre variabilele *Venitul lunar al unei gospodării (mii Lei)* și *Cheltuielile lunare ale gospodăriei (Lei)*, pentru un eșantion de 6 gospodării, s-au înregistrat următoarele valori:

Tabelul 1.3. *Veniturile și cheltuielile lunare înregistrate pentru un eșantion de 6 gospodării*

Venituri lunare (mii Lei) *(X)*	Cheltuieli lunare (Lei) *(Y)*
3	12
4	25
6	40
4	35
7	50
8	65

Sursa: *Date convenționale*

Se cere:

a) să se estimeze punctual coeficientul de corelație;

b) să se estimeze punctual raportul de corelație.

BCU IASI CENTRU UNIVERSITAR LIBRARY

Rezolvare

a. Estimarea punctuală a coeficientului de corelație

Estimația coeficientului de corelație se calculează după relația:

$$r = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2][n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}.$$

Înlocuind cu valorile calculate în tabelul 1.4, se obține următorul rezultat:

$$r = \frac{6 \cdot 1386 - 32 \cdot 227}{\sqrt{[6 \cdot 190 - 32^2][6 \cdot 10319 - (227)^2]}} = 0{,}95.$$

Tabelul 1.4. *Elemente de calcul*

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
3	12	9	36	144
4	25	16	100	625
6	40	36	240	1600
4	35	16	140	1225
7	50	49	350	2500
8	65	64	520	4225
32	227	190	1386	10319

Interpretare

Între *Cheltuielile lunare* şi *Venitul lunar,* există o legătură directă ($r>0$) şi foarte puternică.

b. Estimarea punctuală a raportului de corelație

Estimația raportului de corelație se calculează după relația:

$$R = \sqrt{\frac{b_0 \sum y_i + b_1 \sum x_i y_i - \frac{1}{n}(\sum y_i)^2}{\sum y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum y_i)^2}}$$

Înlocuind cu valorile calculate în tabelul 1.4, se obține rezultatul:

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$R = \sqrt{\frac{-10{,}45 \cdot 227 + 9{,}06 \cdot 1385 - \frac{1}{6}(227)^2}{10319 - \frac{1}{6}(227)^2}} = 0{,}95 .$$

Interpretare

Între *Cheltuielile lunare* şi *Venitul lunar* există o legătură foarte puternică.

Observaţie. Pentru modelul liniar simplu, are loc relaţia $R = |r|$.

Problema 2

Rezultatele modelării legăturii dintre variabilele *Preţul unui produs* (*X*, lei) şi *Valoarea lunară a vânzărilor produsului* (*Y*, mii lei), pentru un eşantion de 400 unităţi comerciale, se prezintă în tabelul de mai jos.

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	291296.0	1	291295.988	385.425	.000[a]
	Residual	300799.8	398	755.778		
	Total	592095.8	399			

a. Predictors: (Constant), Pretul

b. Dependent Variable: Valoarea lunara a vanzarilor

Sursa: *Date convenţionale*

Se cere:

a. să se calculeze şi să se interpreteze valoarea estimată a raportului de corelaţie;

b. să se calculeze şi să se interpreteze valoarea estimată a raportului de determinaţie;

c. să se calculeze şi să se interpreteze valoarea estimată a raportului de determinaţie ajustat.

Rezolvare

a. Estimaţia raportului de corelaţie

Pe baza datelor din tabelul de mai sus, valoarea estimată a raportului de corelaţie se determină astfel:

$$R = \sqrt{\frac{ESS}{TSS}} = \sqrt{\frac{291296}{592095.8}} = 0{,}701$$, unde:

- *ESS* este estimația variației explicate (*Explained Sum of Squares* sau *Regression Sum of Squares*);
- *TSS* este estimația variației totale (*Total Sum of Squares*).

Interpretare

Valoarea $R = 0{,}701$ indică o legătură relativ puternică între *Prețul unui produs* și *Valoarea lunară a vânzărilor produsului.*

b. Estimația raportului de determinație

Pe baza datelor din tabelul de rezultate, valoarea estimată a raportului de determinație se calculează astfel:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{291296}{592095.8} = 0{,}4919.$$

Interpretare

Valoarea $R^2 = 0{,}4919$ indică faptul că 49,19% din variația variabilei dependente, *Valoarea lunară a vânzărilor produsului,* este explicată de variația variabilei independente, *Prețul produsului.*

c. Estimația raportului de determinație ajustat

Pe baza datelor din tabelul de rezultate, valoarea estimată a raportului de determinație ajustat se determină astfel:

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{\frac{RSS}{n-k}}{\frac{TSS}{n-1}} = 1 - \frac{\frac{300799.8}{398}}{\frac{592095.8}{399}} = 0{,}491.$$

Interpretare

Valoarea $\overline{R}^2 = 0{,}491$ arată că 49,1% din variația variabilei dependente, *Valoarea lunară a vânzărilor produsului,* este explicată de variația variabilei independente, *Prețul produsului.*

Problema 3

În studiul intensității legăturii dintre variabilele *Puterea motorului (X, cai putere)* și *Greutatea autoturismului (Y, kg)*, înregistrate pentru un eșantion de 400 mașini, s-au obținut următoarele rezultate:

BCU IASI CENTRU UNIVERSITAR LIBRARY

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.859[a]	.739	.738	436.347

a. Predictors: (Constant), Puterea motorului

Sursa: *Prelucrat pe baza datelor din baza de date SPSS Cars*

Se cere:

a. să se interpreteze valoarea estimată a raportului de corelaţie;

b. să se interpreteze valoarea estimată a raportului de determinaţie;

c. să se testeze semnificaţia raportului de corelaţie, asumându-se un risc $\alpha=0,05$.

Rezolvare

a. Estimaţia raportului de corelaţie

Valoarea estimată a raportului de corelaţie este: $R=0,859$.

Interpretare

Această valoare indică o legătură puternică între *Puterea motorului* şi *Greutatea autoturismului.*

b. Estimaţia raportului de determinaţie

Valoarea estimată a raportului de determinaţie este:

$R^2 = 0,739$.

Interpretare

Această valoare arată că 73,9% din variaţia *Greutăţii autoturismului* este explicată de variaţia *Puterii motorului.*

c. Testarea semnificaţiei raportului de corelaţie

Formularea ipotezelor

H_0: $\eta = 0$ (nu există legătură între cele două variabile);

H_1: $\eta > 0$ (există legătură între cele două variabile).

Alegerea pragului de semnificaţie a testului

$\alpha=0,05$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Alegerea statisticii test

Pentru testarea semnificației raportului de corelație, se folosește statistica Fisher: $F = \frac{\hat{\eta}^2}{1-\hat{\eta}^2} \cdot \frac{n-k}{k-1}$.

Valoarea teoretică a testului

$F_{\alpha;k-1;n-k}$ se citește din tabelul Fisher. Pentru un risc $\alpha=0,05$, se citește valoarea teoretică $F_{0,05;2-1;400-2} = 3,842$.

Calculul statisticii test

$$F_{calc} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-k}{k-1} = \frac{0,739}{1-0,739} \cdot \frac{400-2}{2-1} = 1126,34.$$

Stabilirea regulii de decizie

- dacă $F_{calc} \leq F_{\alpha;k-1;n-k}$, se acceptă ipoteza H_0;
- dacă $F_{calc} > F_{\alpha;k-1;n-k}$, se respinge ipoteza H_0, cu o probabilitate de 0,95.

Interpretarea rezultatelor

$F_{calc} = 1126,34 > F_{0,05;2-1;398} = 3,842$. Acest rezultat conduce la decizia de a respinge ipoteza H_0. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că valoarea raportului de corelație este semnificativ diferită de zero, adică între *Greutatea autoturismului* și *Puterea motorului* există o legătură puternică.

Problema 4

În studiul intensității legăturii dintre variabilele *Puterea motorului (X, cai putere)* și *Greutatea autoturismului (Y, kg)*, înregistrate pentru un eșantion de 400 mașini, s-au obținut următoarele rezultate:

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Correlations

		Puterea motorului	Greutatea autoturismului
Puterea motorului	Pearson Correlation	1	.859**
	Sig. (2-tailed)		.000
	N	400	400
Greutatea autoturismului	Pearson Correlation	.859**	1
	Sig. (2-tailed)	.000	
	N	400	400

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Sursa: *Prelucrat pe baza datelor din baza de date SPSS Cars*

Se cere:

a. să se interpreteze valoarea estimată a coeficientului de corelație;

b. să se testeze semnificația coeficientului de corelație, asumându-se un risc $\alpha=0,05$.

Rezolvare

a. Estimația coeficientului de corelație

Valoarea estimată a coeficientului de corelație este: $r=0,859$.

Interpretare

Această valoare indică o legătură directă ($r>0$) şi puternică între *Puterea motorului* şi *Greutatea autoturismului.*

b. Testarea semnificației coeficientului de corelație

Formularea ipotezelor

H_0: $\rho=0$ (nu există o legătură între cele două variabile);

H_1: $\rho>0$ (există legătură între cele două variabile).

Alegerea pragului de semnificație a testului

$\alpha=0,05$.

Alegerea statisticii test

Pentru testarea semnificației raportului de corelație, se folosește statistica *Student*: $t=\dfrac{\hat{\rho}}{\sqrt{\dfrac{1-\hat{\rho}^2}{n-2}}}$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Valoarea teoretică a testului

$t_{\alpha/2;n-k}$ se citeşte din tabelul *Student*. Pentru un risc $\alpha=0,05$, se citeşte valoarea teoretică $t_{0,025;400-2}=1,96$.

Calculul statisticii test

$$t_{calc} = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} = \frac{0,859}{\sqrt{\frac{1-0,737}{398}}} = 34,36$$

Stabilirea regulii de decizie

- dacă $t_{calc} \leq t_{\alpha/2;n-k}$, se acceptă ipoteza H_0;
- dacă $t_{calc} > t_{\alpha/2;n-k}$, se respinge ipoteza H_0, cu o probabilitate de 0,95,

respectiv,

- dacă $Sig. \geq \alpha$, se acceptă ipoteza H_0;
- dacă $Sig < \alpha$, se respinge ipoteza H_0, cu o probabilitate de 0,95.

Interpretarea rezultatelor

$t_{calc} = 34,36 > t_{0,025;398} = 1,96$, respectiv $Sig=0,000 < \alpha=0,05$. Acest rezultat conduce la decizia de a respinge ipoteza H_0. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că valoarea coeficientului de corelaţie este semnificativ diferită de zero, adică între *Greutatea autoturismului* şi *Puterea motorului* există o legătură puternică.

Problema 5

În studiul intensităţii legăturii dintre variabilele *Puterea motorului (X, cai putere)* şi *Greutatea autoturismului (Y, kg)*, înregistrate pentru un eşantion de 400 maşini, s-au obţinut următoarele rezultate:

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	214115756.1	1	214115756.1	1124.566	.000[a]
	Residual	75778622.22	398	190398.548		
	Total	289894378.3	399			

a. Predictors: (Constant), Puterea motorului

b. Dependent Variable: Greutatea autoturismului

Sursa: *Prelucrat pe baza datelor din baza de date SPSS Cars*

BCU IAŞI CENTRU UNIVERSITY LIBRARY

Se cere să se testeze semnificaţia raportului de corelaţie, asumându-se un risc $\alpha=0,05$.

Rezolvare

Formularea ipotezelor

H_0: $\eta = 0$ (nu există legătură între cele două variabile);

H_1: $\eta > 0$ (există legătură între cele două variabile).

Alegerea pragului de semnificaţie a testului

$\alpha=0,05$.

Alegerea statisticii test

Pentru testarea semnificaţiei raportului de corelaţie, se foloseşte statistica Fisher: $F = \dfrac{\dfrac{\hat{V}_E}{k-1}}{\dfrac{\hat{V}_R}{n-k}}$.

Valoarea teoretică a testului

$F_{\alpha;k-1;n-k}$ se citeşte din tabelul Fisher. Pentru un risc $\alpha=0,05$, se citeşte valoarea teoretică $F_{0,05;2-1;400-2} = 3,842$.

Calculul statisticii test

$$F_{calc} = \frac{\dfrac{214115756,1}{1}}{\dfrac{75778622,22}{398}} = \frac{214115756,1}{190398,548} = 1124,566.$$

Stabilirea regulii de decizie

- dacă $F_{calc} \le F_{\alpha;k-1;n-k}$, se acceptă ipoteza H_0;
- dacă $F_{calc} > F_{\alpha;k-1;n-k}$, se respinge ipoteza H_0, cu o încredere de 0,95.

Interpretarea rezultatelor

$F_{calc} = 1124,566 > F_{0,05;2-1;400-2} = 3,842$. Acest rezultat conduce la decizia de a respinge ipoteza H_0. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că valoarea raportului de corelaţie este semnificativ diferită de zero, adică între *Greutatea autoturismului* şi *Puterea motorului* există o legătură puternică.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.2.2. Teste grilă

1. În studiul intensității legăturii dintre variabilele *Valoarea venitului* (mii Lei) şi *Valoarea consumului* (mii Lei), înregistrate la nivelul unui eşantion de 50 de gospodării, s-au obținut următoarele rezultate:

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square
1	.957[a]	.916	.895

a. Predictors: (Constant), Val_venitului

Sursa: *Date convenționale*

Valoarea estimată a raportului de corelație este:

a) 0,957
b) 0,916
c) 0,895

2. În studiul intensității legăturii dintre variabilele *Valoarea venitului* (mii Lei) şi *Valoarea consumului* (mii Lei), înregistrate la nivelul unui eşantion de 50 de gospodării, s-au obținut următoarele rezultate:

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square
1	.957[a]	.916	.895

a. Predictors: (Constant), Val_venitului

Sursa: *Date convenționale*

Valoarea estimată a raportului de determinație este:

a) 0,957
b) 0,916
c) 0,895

BCU "ION CREANGĂ" UNIVERSITY LIBRARY

3. În studiul intensității legăturii dintre două variabile, *X* şi *Y*, s-au obținut următoarele rezultate:

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.968[a]	.938	.917	.70711

a. Predictors: (Constant), X

Sursa: *Date convenționale*

Pentru rezultatele de mai sus, sunt corecte afirmațiile:
a) între variabilele *X* şi *Y* există o legătură puternică
b) între variabilele *X* şi *Y* există o legătură slabă
c) 93,8% din variația variabilei *Y* este explicată prin variația variabilei *X*

4. În studiul intensității legăturii dintre două variabile, *X* şi *Y*, s-au obținut următoarele rezultate:

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	22.500	1	22.500	45.000	.007[a]
	Residual	1.500	3	.500		
	Total	24.000	4			

a. Predictors: (Constant), X

b. Dependent Variable: Y

Sursa: *Date convenționale*

Pentru rezultatele de mai sus, sunt corecte afirmațiile:
a) valoarea estimată a raportului de corelație este *R=0,937*
b) valoarea estimată a raportului de corelație este *R=0,968*
c) se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că valoarea raportului de corelație este semnificativ diferită de zero

5. În studiul intensității legăturii dintre două variabile, *X* şi *Y*, s-au obținut următoarele rezultate:

BCU INSTITUTIONAL UNIVERSITY LIBRARY

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	22.500	1	22.500	45.000	.007[a]
	Residual	1.500	3	.500		
	Total	24.000	4			

a. Predictors: (Constant), X

b. Dependent Variable: Y

Sursa: *Date convenționale*

Pentru rezultatele de mai sus, sunt corecte afirmațiile:
a) modelul de regresie estimat este semnificativ cu o probabilitate de 0,95
b) volumul eşantionului este de 5 unități
c) modelul de regresie estimat este semnificativ cu o probabilitate de 0,07

6. Domeniul de variație a coeficientului de corelație este:
a) [0, 1]
b) [-1, 1]
c) [-3, 3]

7. În cazul unui model de regresie liniară simplă, este corectă relația:
a) $r^2=R^2$
b) $\beta_0 = \beta_1$
c) $s_{\hat{\beta}_0} = s_{\hat{\beta}_1}$

8. Domeniul de variație a raportului de corelație este:
a) [0, 1]
b) [-1, 1]
c) [-3, 3]

9. Domeniul de variație a raportului de determinație este:
a) [0, 1]
b) [-1, 1]
c) [-3, 3]

10. Pentru aprecierea intensității legăturii dintre două variabile, se pot utiliza indicatorii:
a) raportul de corelație

BCU ITS/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) coeficientul de corelaţie
c) raportul de determinaţie

11. În studiul intensităţii legăturii dintre variabilele *Preţul unui produs* (lei) şi *Valoarea vânzărilor produsului* (mii lei), înregistrate la nivelul unui eşantion de 400 de gospodării, s-au obţinut următoarele rezultate:

Correlations

		Pretul produsului	Valoarea vanzarilor
Pretul produsului	Pearson Correlation	1	-.801**
	Sig. (2-tailed)		.000
	N	400	400
Valoarea vanzarilor	Pearson Correlation	-.801**	1
	Sig. (2-tailed)	.000	
	N	400	400

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Sursa: *Date convenţionale*

Pentru rezultatele de mai sus, sunt corecte afirmaţiile:
a) se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că valoarea coeficientului de corelaţie este semnificativ diferită de zero
b) între cele două variabile, există o legătură puternică
c) între cele două variabile, există o legătură directă

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezultate pentru testele grilă

Număr test	Răspunsuri corecte
1	a
2	b
3	a, c
4	b, c
5	a, b
6	b
7	a
8	a
9	a
10	a, b, c
11	a, b

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul 2

MODELUL DE REGRESIE LINIARĂ MULTIPLĂ

1.	Estimarea şi testarea parametrilor modelului
	Probleme
	Teste grilă
2.	Estimarea şi testarea indicatorilor de corelaţie multiplă
	Probleme
	Teste grilă

În acest capitol, sunt prezentate probleme rezolvate şi teste grilă care privesc modelarea fenomenelor economice, cu ajutorul modelelor de regresie liniară multiplă.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.1. Estimarea şi testarea parametrilor modelului

Un model de regresie liniară multiplă este un model care permite aprecierea influenţei simultane a două sau mai multe variabile independente asupra unei variabile dependente.

Forme particulare şi forma generală a unui model de regresie liniară multiplă sunt prezentate în continuare.

- modelul de regresie liniară multiplă cu două variabile independente:

$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$;

- modelul de regresie liniară multiplă cu trei variabile independente:

$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$;

- modelul de regresie liniară multiplă cu p variabile independente (forma generală):

$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_p X_p + \varepsilon$;

unde:

- Y reprezintă *variabila dependentă*;
- $X_1, X_2, \ldots, X_p$ reprezintă *variabilele independente*;
- $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$ reprezintă *parametrii* modelului de regresie;
- ε reprezintă *variabila eroare*.

În procesul de estimare a parametrilor unui model de regresie liniară multiplă, se poate utiliza metoda celor mai mici pătrate. Această metodă presupune condiţia:

$$\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2 = \min; \quad \sum_i (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{1i} - \hat{\beta}_2 x_{2i} - \ldots - \hat{\beta}_p x_{pi})^2 = \min .$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuaţii care rezultă din problema de minim, se obţin estimatorii parametrilor modelului de regresie. Majoritatea programelor statistice pot estima parametrii unui model de regresie liniară multiplă. În rezolvarea problemelor din acest capitol, vom utiliza programul SPSS.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.1.1. Probleme rezolvate

Problema 1

În studiul unui model econometric, care explică variația *Populației ocupate civile* (persoane) în 40 dintre județele României, în anul 2005, în funcție de *Câștigul salarial mediu nominal lunar net* (Lei) și *Produsul intern brut* (milioane Lei), s-au obținut rezultatele de mai jos.

Coefficients[a,b]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
		B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1	castigul salarial nominal mediu net	96,420	16,447	,336	5,862	,000
	PIB milioane RON	20,881	1,779	,673	11,741	,000

a. Dependent Variable: Populatia ocup civila total persoane

b. Linear Regression through the Origin

Sursa: *Date prelucrate din baza de date www.insse.ro/ Tempo-Online*

Se cere:

a. să se scrie ecuația estimată a modelului de regresie multiplă;
b. să se interpreteze estimațiile parametrilor de regresie;
c. să se estimeze prin interval de încredere parametrii modelului de regresie liniară multiplă, considerând un nivel de încredere de 0,95.

Rezolvare

a. Ecuația estimată a modelului de regresie multiplă

Din rezultatele de mai sus, se observă că avem un model de regresie liniară multiplă fără constantă.

Ecuația modelului econometric estimat al legăturii dintre variabila dependentă *Populația ocupată civilă (Y),* și variabilele independente *Câștigul salarial mediu nominal lunar net* (X_1) și *Produsul intern brut* (X_2) este de forma:

$$Y_x = b_1 X_1 + b_2 X_2,$$

unde:

- b_1 este estimația punctuală a parametrului β_1;
- b_2 este estimația punctuală a parametrului β_2.

BCU ACADEMIC LIBRARY

Pe baza rezultatelor obținute, se poate scrie ecuația estimată a modelului de regresie multiplă a populației ocupate civile.

$$Y_x = 96,420 \cdot X_1 + 20,881 \cdot X_2$$

b. Interpretarea parametrilor modelului de regresie multiplă

Valorile estimate ale parametrilor modelului sunt:

- b_1 = *96,420,* care arată că variabila dependentă *Populația ocupată civilă* (*Y*) crește, în medie, cu *96,420≈96* de persoane, atunci când *Câștigul salarial mediu nominal lunar net* (X_1) crește cu 1 Leu, în condițiile în care variabila independentă *Produsul intern brut* (X_2) rămâne constantă;
- b_2 = *20,881,* care arată că variabila dependentă *Populația ocupată civilă* (*Y*) crește, în medie, cu *20,881≈21* de persoane atunci când *Produsul intern brut* (X_2) crește cu 1 milion Lei, în condițiile în care variabila independentă *Câștigul salarial mediu nominal lunar net* (X_1) rămâne constantă.

c. Intervale de încredere pentru parametrii modelului

Intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_1 este definit de relația:

$\left[b_1 \pm t_{\alpha/2;n-2} \cdot s_{\hat{\beta}_1}\right]$, unde:

- b_1=*96,420;*
- $t_{\alpha/2;n-k}$ este valoarea teoretică din tabela *Student*. Pentru un risc α=*0,05* şi *n-k=n-2=40-2=38* grade de libertate (unde *k* = numărul de parametri), valoarea corespunzătoare este:
  $t_{\alpha/2;n-k} = t_{0,025;38} = 1,96$.
- $s_{\hat{\beta}_1} = 16,447$ este estimația abaterii standard a estimatorului parametrului β_1.

În urma calculelor, intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_1 este:

$[96,42 \pm 1,96 \cdot 16,447]$, respectiv $[64,184; 128,656]$ persoane.

Interpretare

Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul β_1 este acoperit de intervalul $[64,184; 128,656]$ persoane.

Intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_2 este definit de relația:

$\left[b_2 \pm t_{\alpha/2;n-2} \cdot s_{\hat{\beta}_2}\right]$, unde:

- b_2=*20,881*;
- $t_{\alpha/2;n-k}$ este valoarea teoretică care se citește din tabela *Student*. Pentru un risc α=*0,05* și *n-k* grade de libertate, valoarea corespunzătoare este: $t_{\alpha/2;n-k} = t_{0,025;38} = 1,96$.
- $s_{\hat{\beta}_2} = 1,779$ este estimația abaterii standard a estimatorului parametrului β_2;

În urma calculelor, intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_2 este:

$[20,881 \pm 1,96 \cdot 1,779]$, respectiv [*17,394; 24,368*] persoane.

Interpretare

Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul β_2 este acoperit de intervalul [*17,394; 24,368*].

Problema 2

În studiul unui model econometric, care explică variația *Câștigului salarial mediu nominal lunar net* (Lei) în 40 dintre județele României, în anul 2005, în funcție de *Produsul intern brut* (mil. Lei), *Investițiile nete pe regiuni de dezvoltare* (milioane Lei) și *Populația activă civilă* (mii persoane), s-au obținut rezultatele de mai jos.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	755,770	53,703		14,073	,000
	PIB milioane RON	,031	,007	1,349	4,162	,000
	InvNete	-,022	,008	-,367	-2,801	,008
	Populația activă civila (mii persoane)	-,721	,303	-,775	-2,382	,023

a. Dependent Variable: castigul salarial nominal mediu net

Sursa: *Date prelucrate din baza de date www.insse.ro/ Tempo-Online*

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Se cere:

a. să se scrie ecuaţia estimată a modelului de regresie multiplă;
b. să se interpreteze estimaţiile parametrilor de regresie;
c. să se testeze nivelul de semnificaţie a parametrilor modelului de regresie liniară multiplă, cu un risc de 0,05.

Rezolvare

a. Ecuaţia estimată a modelului de regresie multiplă

Ecuaţia modelului econometric estimat al legăturii dintre variabila dependentă *Câştigului salarial mediu nominal lunar net (Y),* şi variabilele independente *Produsul intern brut* (X_1), *Investiţiile nete pe regiuni de dezvoltare* (X_2) şi *Populaţia activă civilă* (X_3) este de forma:

$$Y_x = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3,$$

unde:

- b_0 este estimaţia punctuală a parametrului β_0;
- b_1 este estimaţia punctuală a parametrului β_1;
- b_2 este estimaţia punctuală a parametrului β_2;
- b_3 este estimaţia punctuală a parametrului β_3.

Pe baza rezultatelor de mai sus, se poate scrie ecuaţia estimată a modelului de regresie liniară multiplă:

$$Y_x = 755,770 + 0,031 \cdot X_1 - 0,022 \cdot X_2 - 0,721 \cdot X_3$$

b. Interpretarea parametrilor modelului de regresie multiplă

Valorile estimate ale parametrilor modelului sunt:

- $b_0 = 755,77$, care arată că nivelul mediu estimat al variabilei dependente, *Câştigul salarial mediu nominal lunar net (Y),* este de 755,77 Lei, atunci când valorile variabilelor independente, respectiv *Produsul intern brut, Investiţiile nete pe regiuni de dezvoltare* şi *Populaţia activă civilă* sunt egale cu zero.
- $b_1 = 0,031$, care arată că variabila dependentă *Câştigul salarial mediu nominal lunar net (Y)* creşte, în medie, cu 0,031 Lei, atunci când variabila independentă *Produsul intern brut* (X_1) creşte cu 1 milion Lei, iar variabilele independente *Investiţiile nete pe regiuni de dezvoltare* şi *Populaţia activă civilă* rămân constante;
- $b_2 = -0,022$, care arată că variabila dependentă *Câştigul salarial mediu nominal lunar net (Y)* scade, în medie, cu 0,022 Lei, atunci

când variabila independentă *Investiţiile nete pe regiuni de dezvoltare (X_2)* creşte cu 1 milion Lei, iar variabilele independente *Produsul intern brut* şi *Populaţia activă* civilă rămân constante;

- $b_3 = -0,721$, care arată că variabila dependentă *Câştigul salarial mediu nominal lunar net (Y)* scade, în medie, cu 0,721 Lei, atunci când variabila independentă *Populaţia activă civilă (X_3)* creşte cu 1 mie de persoane, iar variabilele independente *Produsul intern brut* şi *Investiţiile nete pe regiuni de dezvoltare* rămân constante.

c. Testarea nivelului de semnificaţie al parametrilor modelului de regresie liniară multiplă

Formularea ipotezelor

H_0: $\beta_0 = 0$ $(M(Y) = 0 | X_1, X_2, X_3 = 0)$;

H_1: $\beta_0 \neq 0$ $(M(Y) \neq 0 | X_1, X_2, X_3 = 0)$.

H_0: $\beta_1 = 0$ (variabila independentă X_1 nu are o influenţă semnificativă asupra lui Y, atunci când variabilele independente X_2 şi X_3 sunt constante).

H_1: $\beta_1 \neq 0$ (variabila independentă X_1 are o influenţă semnificativă asupra lui Y, atunci când variabilele independente X_2 şi X_3 sunt constante).

H_0: $\beta_2 = 0$ (variabila independentă X_2 nu are o influenţă semnificativă asupra lui Y, atunci când variabilele independente X_1 şi X_3 sunt constante).

H_1: $\beta_2 \neq 0$ (variabila independentă X_2 are o influenţă semnificativă asupra lui Y, atunci când variabilele independente X_1 şi X_3 sunt constante).

H_0: $\beta_3 = 0$ (variabila independentă X_3 nu are o influenţă semnificativă asupra lui Y, atunci când variabilele independente X_1 şi X_2 sunt constante).

H_1: $\beta_3 \neq 0$ (variabila independentă X_3 are o influenţă semnificativă asupra lui Y, atunci când variabilele independente X_1 şi X_2 sunt constante).

Alegerea pragului de semnificaţie

$\alpha = 0,05$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Alegerea statisticii test

Se alege statistica *Student*:

$$t=\frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}, \text{ respectiv } t=\frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}, t=\frac{\hat{\beta}_2-\beta_2}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}}, t=\frac{\hat{\beta}_3-\beta_3}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_3}}.$$

Valoarea teoretică a statisticii test

$t_{\alpha/2;n-k}$ se citeşte din tabelul *Student*. Pentru exemplul dat, considerând un risc α=0,05, se citeşte valoarea $t_{\alpha/2,n-4}=t_{0,025;40-4}=1,96$.

Calculul statisticii test

Pentru exemplul considerat, statistica *Student* se calculează astfel:

- pentru parametrul β_0: $t_{calc}=\frac{b_0}{s_{\hat{\beta}_0}}=\frac{755,770}{53,703}=14,073$;

- pentru parametrul β_1: $t_{calc}=\frac{b_1}{s_{\hat{\beta}_1}}=\frac{0,031}{0,007}=4,162$;

- pentru parametrul β_2: $t_{calc}=\frac{b_2}{s_{\hat{\beta}_2}}=\frac{-0,022}{0,008}=-2,801$;

- pentru parametrul β_3: $t_{calc}=\frac{b_3}{s_{\hat{\beta}_3}}=\frac{-0,721}{0,303}=-2,382$.

Stabilirea regulii de decizie

- dacă $|t_{calc}|\le t_{\alpha/2;n-4}$, se acceptă ipoteza H_0.
- dacă $|t_{calc}|> t_{\alpha/2;n-4}$, se respinge ipoteza H_0, cu o probabilitate de 0,95.

Interpretarea rezultatelor

- pentru parametrul β_0 : $|t_{calc}|=14,073>t_{0,025;36}=1,96$. Acest rezultat arată că se respinge ipoteza H_0 cu un risc de 0,05. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul β_0 este semnificativ diferit de zero.

- pentru parametrul β_1: $|t_{calc}|=4,162>t_{0,025;36}=1,96$. Acest rezultat arată că se respinge ipoteza H_0 cu un risc de 0,05. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că variabila X_1 are o influenţă semnificativă asupra variabilei Y, când variabilele X_2 şi X_3 sunt constante.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- pentru parametrul β_2: $|t_{calc}| = 2,801 > t_{0,025;36} = 1,96$. Acest rezultat arată că se respinge ipoteza H_0 cu un risc de 0,05. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că variabila X_2 are o influență semnificativă asupra variabilei Y, când variabilele X_1 și X_3 sunt constante.

- pentru parametrul β_3: $|t_{calc}| = 2,382 > t_{0,025;36} = 1,96$. Acest rezultat arată că se respinge ipoteza H_0 cu un risc de 0,05. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că variabila X_3 are o influență semnificativă asupra variabilei Y, când variabilele X_1 și X_2 sunt constante.

Problema 3

Pentru o variabilă Y și patru variabile independente $X_1,\ldots,X_4$, se consideră ecuația de regresie estimată de forma:

$$Y = 5 + 10 \cdot X_1 + 25 \cdot X_2 - 30 \cdot X_3 - 20 \cdot X_4$$

Se cere să se testeze nivelul de semnificație al parametrilor modelului de regresie liniară multiplă, știind că:

$$\alpha = 0,05;\ n = 25;\ s_{\hat{\beta}_0} = 5;\ s_{\hat{\beta}_1} = 0,5;\ s_{\hat{\beta}_2} = 5;\ s_{\hat{\beta}_3} = 10;\ s_{\hat{\beta}_4} = 15.$$

Rezolvare

Formularea ipotezelor

H_o: $\beta_0 = 0$ $(M(Y) = 0 \,|\, X_1, X_2, X_3, X_4 = 0)$;

H_1: $\beta_0 \neq 0$ $(M(Y) \neq 0 \,|\, X_1, X_2, X_3, X_4 = 0)$.

H_o: $\beta_i = 0$ (variabila independentă X_i nu are o influență semnificativă asupra lui Y, atunci când celelalte variabile independente sunt constante).

H_1: $\beta_i \neq 0$ (variabila independentă X_i are o influență semnificativă asupra lui Y, atunci când celelalte variabile independente sunt constante).

$i = \overline{1,4}$.

Alegerea pragului de semnificație

α=0,05.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Alegerea statisticii test

Se alege statistica *Student*:

$t = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$, respectiv $t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}$, $i = \overline{1,4}$.

Valoarea teoretică a statisticii test

$t_{\alpha/2;n-k}$ se citeşte din tabelul *Student*. Pentru exemplul dat, considerând un risc α=0,05, se citeşte valoarea $t_{\alpha/2,n-5}=t_{0,025;25-5}=2,086$.

Calculul statisticii test

Pentru exemplul considerat, statistica *Student* se calculează astfel:

- pentru parametrul β_0: $t_{calc} = \frac{b_0}{s_{\hat{\beta}_0}} = \frac{5}{5} = 1$;

- pentru parametrul β_1: $t_{calc} = \frac{b_1}{s_{\hat{\beta}_1}} = \frac{10}{0,5} = 20$;

În mod similar, se determină valorile calculate ale statisticii *Student* pentru parametrii β_2 ($t_{calc} = 5$), β_3 ($t_{calc} = -3$) şi β_4 ($t_{calc} = -1,333$).

Stabilirea regulii de decizie

- dacă $|t_{calc}| \le t_{\alpha/2;n-5}$, se acceptă ipoteza H_0.
- dacă $|t_{calc}| > t_{\alpha/2;n-5}$, se respinge ipoteza H_0, cu o probabilitate de *0,95*.

Interpretarea rezultatelor

- pentru parametrul β_0: $|t_{calc}| = 1 < t_{0,025;20} = 2,086$. Acest rezultat permite luarea deciziei de a accepta ipoteza H_0, prin urmare parametrul β_0 nu este semnificativ diferit de zero.

- pentru parametrul β_1: $|t_{calc}| = 20 > t_{0,025;20} = 2,086$. Acest rezultat permite luarea deciziei de a respinge ipoteza H_0 cu un risc de 0,05. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că variabila X_1 are o influenţă semnificativă asupra variabilei Y, când variabilele X_2, X_3 şi X_4 sunt constante.

În mod similar, se interpretează rezultatele testării parametrilor β_2, β_3 şi β_4.

2.1.2. Teste grilă

1. Se consideră un model de regresie de forma:

$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_p X_p + \varepsilon$.

În acest model de regresie liniară multiplă, avem:

a) p variabile dependente
b) p variabile independente
c) $p+1$ variabile dependente
d) $p+1$ variabile independente

2. Se consideră un model de regresie liniară multiplă de forma:

$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_p X_p + \varepsilon$.

Pentru acest caz, numărul de parametri ai modelului este:

a) x
b) p
c) $p+1$
d) $p-1$

3. Se consideră un model de regresie liniară multiplă de forma:

$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_p X_p + \varepsilon$.

Modelul definit prezintă:

a) o variabilă dependentă
b) p variabile independente
c) $p+1$ parametri
d) p variabile dependente

4. Se consideră un model de regresie liniară multiplă de forma:

$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$.

Pentru acest model de regresie, trebuie să estimăm:

a) o variabilă dependentă
b) 2 variabile independente
c) 3 parametri
d) 4 parametri

BCU "LUCIAN BLAGA" UNIVERSITY LIBRARY

5. Se consideră un model de regresie liniară multiplă de forma: $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_4 X_4 + \varepsilon$.

Parametrul β_0 reprezintă:

a) valoarea medie a variabilei dependente, în condiţiile în care variabilele independente iau valoarea zero
b) coeficientul de regresie multiplă
c) panta dreptei de regresie
d) variaţia absolută a variabilei Y la o variaţie absolută cu o unitate a celor patru variabile independente

6. Se consideră un model de regresie liniară multiplă de forma: $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$.

Parametrul β_2 reprezintă:

a) variaţia medie absolută a variabilei Y corespunzătoare unei variaţii absolute cu o unitate a variabilei X_2, în situaţia în care variabila X_1 rămâne constantă
b) variaţia medie relativă a variabilei dependente Y corespunzătoare unei variaţii absolute cu o unitate a variabilei X_1, în situaţia în care cealaltă variabilă independentă rămâne constantă
c) variaţia absolută a variabilei Y corespunzătoare unei variaţii relative cu un procent a variabilei X_2, în situaţia în care variabila X_1 rămâne constantă
d) variaţia relativă a variabilei Y corespunzătoare unei variaţii absolute cu o unitate a variabilei X_2, în situaţia în care variabila X_1 rămâne constantă.

7. Se consideră modelul de regresie de forma: $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \varepsilon$.

Modelul de regresie este:

a) liniar multiplu
b) neliniar multiplu
c) polinomial
d) liniar multiplu cu patru variabile independente

8. Forma generală a modelului de regresie liniară multiplă este:

a) $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_p X_p + \varepsilon$

b) $Y = \beta_0 + \beta_1^{X_1} + \beta_2^{X_2} + e^{\varepsilon}$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon$

d) $Y = \beta_0 \cdot \beta_1 X_1 \cdot \beta_2 X_2 \cdot \ldots \cdot \beta_p X_p \cdot \varepsilon$

9. Forma generală a modelului de regresie liniară multiplă cu două variabile independente este:

a) $Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$

b) $Y = \beta_1 \cdot \beta_2 X_2 \cdot \varepsilon$

c) $Y = \beta_0 + \beta_1^{X_1} + \beta_2^{X_2} + \varepsilon$

d) $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$

10. În cazul unui model de regresie liniară multiplă de forma $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$, estimația variantei estimatorului parametrului β_3 se calculează după relația:

a) $s^2_{\hat{\beta}_3} = \dfrac{s_3^2}{\sum_i (x_{3i} - \bar{x}_3)^2 (1 - r_3^2)}$

b) $s^2_{\hat{\beta}_3} = \dfrac{s^2}{\sum_i (x_{3i} - \bar{x}_3)^2 (1 - r^2_{123})}$

c) $s^2_{\hat{\beta}_3} = \dfrac{\sum_i e_3^2}{n-3}$

d) $s^2_{\hat{\beta}_3} = \dfrac{\sum_i e_i^2}{n-4}$

11. În cazul unui model de regresie liniară multiplă de forma $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$, intervalul de încredere pentru parametrul β_3, considerând un risc α, se estimează după relația:

a) $b_i \pm t_{\alpha/3} \cdot s_{\hat{\beta}_i}$

b) $b_3 \pm t_{\alpha/3} \cdot s_{\hat{\beta}_3}$

c) $b_3 \pm t_{\alpha/2} \cdot s_{\hat{\beta}_3}$

d) $b_3 \pm t_{\alpha} \cdot s_{\hat{\beta}_3}$

BCU "MIHAI EMINESCU" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

12. S-a estimat un model de regresie liniară multiplă dintre variabila dependentă Y şi variabilele independente X_1, X_2, X_3. Rezultatele modelării se găsesc în tabelul de mai jos.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
		B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1	(Constant)	-10266,6	2959,838		-3,469	,001
	X1	1,927	,044	,888	43,435	,000
	X2	173,203	34,677	,102	4,995	,000
	X3	-22,509	3,339	-,138	-6,742	,000

a. Dependent Variable: Y

Precizaţi care este ecuaţia estimată a modelului:

a) $Y_X = 10266,6 + 1,927 \cdot X_1 + 173,203 \cdot X_2 + 22,509 X_3$

b) $Y_X = 1,927 \cdot X_1 + 173,203 \cdot X_2 + 22,509 X_3$

c) $Y_X = -10266,6 + 173,203 \cdot X_1 + 1,927 \cdot X_2 - 22,509 X_3$

d) $Y_X = -10266,6 + 1,927 \cdot X_1 + 173,203 \cdot X_2 - 22,509 X_3$

13. S-a estimat un model de regresie liniară multiplă de forma $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$. Valorile estimate ale parametrilor de regresie se găsesc în tabelul de mai jos.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
		B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1	(Constant)	-10266,6	2959,838		-3,469	,001
	X1	1,927	,044	,888	43,435	,000
	X2	173,203	34,677	,102	4,995	,000
	X3	-22,509	3,339	-,138	-6,742	,000

a. Dependent Variable: Y

Se cere să se calculeze limitele intervalului de încredere pentru parametrul β_2 ştiind că riscul asumat este $\alpha=0,05$ şi $n=100$.

a) *[-1026,6; 295,838]*

b) *[1,92; 0,44]*

c) *[-173,203; 34,677]*

d) *[105,236; 241,169]*

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

14. S-a estimat un model de regresie liniară multiplă de forma $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$. Valorile estimate ale parametrilor de regresie se găsesc în tabelul de mai jos.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-10266,6	2959,838		-3,469	,001
	X1	1,927	,044	,888	43,435	,000
	X2	173,203	34,677	,102	4,995	,000
	X3	-22,509	3,339	-,138	-6,742	,000

a. Dependent Variable: Y

Interpretarea corectă a estimației b_1 a parametrului β_1 este:
a) b_1=*1,927* și arată că variabila dependentă Y crește cu 1,927 unități, atunci când X_1 crește cu o unitate
b) b_1=*1,927* și arată că variabila dependentă Y crește, în medie, cu 1,927 unități, atunci când X_1 crește cu o unitate, iar celelalte variabile independente rămân constante
c) b_1=*1,927* și arată că variabila dependentă Y crește, în medie, cu 1,927 unități, atunci când X_1 crește cu o unitate
d) b_1=*1,927* și arată că variabila dependentă Y crește, în medie, de 1,927 ori, atunci când X_1 crește cu o unitate, iar celelalte variabile independente rămân constante

15. Se consideră variabilele *Rata de activitate feminină* (%), *Salariul mediu nominal lunar net al bărbaților* (Lei), *Rata de ocupare masculină* (%), *Numărul de copii în vârstă de până la 4 ani* (persoane) și *Numărul de ani de școală ai populației ocupate feminine pe regiuni de dezvoltare* (ani), ale căror valori au fost înregistrate în 40 dintre județele României. În urma estimării unui model de regresie liniară multiplă de forma $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \varepsilon$, s-au obținut rezultatele prezentate în tabelul de mai jos.

BCU IAȘI UNIVERSITY LIBRARY

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	24,613	5,983		4,114	,000
	salariul nominal mediu net barbati	-,011	,004	-,276	-2,738	,010
	rata de ocpare masculina	,658	,086	,957	7,652	,000
	nr copii pana 4 ani 1 iulie	-9,7E-005	,000	-,249	-2,704	,011
	nr de ani de scoala ai pop ocupate feminine pe regiuni	-,320	,580	-,067	-,552	,585

a. Dependent Variable: rata de activitate feminina

Sunt adevărate afirmaţiile:

a) parametrul β_0 nu este semnificativ diferit de zero, cu o probabilitate de 0,95

b) parametrul β_1 este semnificativ diferit de zero, cu o probabilitate de 0,95

c) parametrul β_3 este semnificativ diferit de zero, cu o probabilitate de 0,95

d) parametrul β_4 este semnificativ diferit de zero, cu o probabilitate de 0,95

16. Se consideră variabilele *Rata de activitate feminină* (%), *Salariul mediu nominal lunar net al bărbaţilor* (Lei), *Rata de ocupare masculină* (%), *Numărul de copii în vârstă de până la 4 ani* (persoane) şi *Numărul de ani de şcoală ai populaţiei ocupate feminine pe regiuni de dezvoltare* (ani), ale căror valori au fost înregistrate în 40 dintre judeţele României, în anul 2005.

În urma estimării unui model de regresie liniară multiplă de forma $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$, s-au obţinut rezultatele prezentate în tabelul de mai jos.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	21,700	2,786		7,788	,000
	salariul nominal mediu net barbati	-,010	,003	-,253	-2,791	,008
	rata de ocpare masculina	,625	,061	,909	10,205	,000
	nr copii pana 4 ani 1 iulie	-8,9E-005	,000	-,230	-2,716	,010

a. Dependent Variable: rata de activitate feminina

BCU IASI UNIVERSITY LIBRARY

Sunt adevărate afirmațiile:

a) modelul estimat al legăturii dintre variabila dependentă *Rata de activitate feminină* și variabilele independente este de forma: $Y = 21,7 - 0,01 \cdot X_1 + 0,625 \cdot X_2 - 8,9 \cdot 10^{-5} \cdot X_3$

b) variabilele independente *Salariul nominal mediu net al bărbaților*, *Rata de ocupare masculină* și *Numărul de copii în vârstă de până la patru ani* au o influență semnificativă asupra variației medii a variabilei dependente *Rata de activitate feminină*

c) o creștere a *Ratei de ocupare masculine* cu 1% determină o creștere, în medie, cu 0,625% a *Ratei de activitate feminine*, atunci când celelalte variabile independente rămân constante

d) nivelul variabilei dependente crește de 21,7 ori, atunci când variabilele independente sunt constante

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezultate pentru testele grilă

Număr test	Răspunsuri corecte
1	b
2	c
3	a, b, c
4	c
5	a
6	a
7	a, d
8	a
9	d
10	b
11	c
12	d
13	d
14	b
15	b, c
16	a, b, c

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.2. Estimarea şi testarea indicatorilor de corelaţie multiplă

Pentru a determina şi testa intensitatea legăturilor dintre variabilele care alcătuiesc modelul de regresie multiplă se folosesc o serie de indicatori: coeficienţii de corelaţie bivariată; coeficienţii de corelaţie parţială; coeficientul de corelaţie multiplă; raportul de corelaţie multiplă; raportul de determinaţie multiplă; raportul de determinaţie multiplă ajustat.

În cazul unui model de regresie multiplă liniară cu două variabile independente, indicatorii de corelaţie multiplă se calculează după relaţiile prezentate în tabelul următor:

Denumire	Relaţii de calcul
Coeficienţii de corelaţie bivariată	$r_{y1} = \dfrac{n\sum_i x_{1i}y_i - \sum_i x_{1i}\sum_i y_i}{\sqrt{\left[n\sum_i x_{1i}^2 - \left(\sum_i x_{1i}\right)^2\right]\left[n\sum_i y_i^2 - \left(\sum_i y_i\right)^2\right]}}$ $r_{y2} = \dfrac{n\sum_i x_{2i}y_i - \sum_i x_{2i}\sum_i y_i}{\sqrt{\left[n\sum_i x_{2i}^2 - \left(\sum_i x_{2i}\right)^2\right]\left[n\sum_i y_i^2 - \left(\sum_i y_i\right)^2\right]}}$ $r_{12} = \dfrac{n\sum_i x_{1i}x_{2i} - \sum_i x_{1i}\sum_i x_{2i}}{\sqrt{\left[n\sum_i x_{1i}^2 - \left(\sum_i x_{1i}\right)^2\right]\left[n\sum_i x_{2i}^2 - \left(\sum_i x_{2i}\right)^2\right]}}$
Coeficienţi de corelaţie parţială	$r_{y1.2} = \dfrac{r_{y1} - r_{y2}r_{12}}{\sqrt{\left(1-r_{y2}^2\right)\left(1-r_{12}^2\right)}}$ $r_{y2.1} = \dfrac{r_{y2} - r_{y1}r_{12}}{\sqrt{\left(1-r_{y1}^2\right)\left(1-r_{12}^2\right)}}$ $r_{12.y} = \dfrac{r_{12} - r_{y1}r_{y2}}{\sqrt{\left(1-r_{y1}^2\right)\left(1-r_{y2}^2\right)}}$

Coeficientul de corelaţie multiplă	$r = \sqrt{\dfrac{r_{y1}^2 + r_{y2}^2 - 2r_{y1}r_{y2}r_{12}}{1 - r_{12}^2}}$
Raportul de corelaţie multiplă	$R = \sqrt{\dfrac{ESS}{TSS}} = \sqrt{1 - \dfrac{RSS}{TSS}} = \sqrt{1 - \dfrac{\sum_i e_i^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}}$
Raportul de determinaţie multiplă	$R^2 = \dfrac{ESS}{TSS} = 1 - \dfrac{RSS}{TSS} = 1 - \dfrac{\sum_i e_i^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}$
Raportul de determinaţie multiplă ajustat	$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\dfrac{n-1}{n-k}$

2.2.1. Probleme rezolvate

Problema 1

Se consideră un model econometric care explică variaţia *Ratei de activitate feminine* (%), înregistrată în 40 de judeţe ale României, în anul 2005, în funcţie de *Salariul mediu nominal net lunar obţinut de persoanele masculine* (Lei), *Rata de ocupare masculină* (%), *Numărul de copii în vârstă de până la 4 ani* (persoane).

În urma prelucrării datelor, s-au obţinut rezultatele din tabelul de mai jos:

Model Summary [b]

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,868[a]	,753	,732	1,79605	1,936

a. Predictors: (Constant), nr copii pana 4 ani 1 iulie, rata de ocpare masculina, salariul nominal mediu net barbati

b. Dependent Variable: rata de activitate feminina

Sursa: *Date prelucrate din baza de date www.insse.ro/ Tempo-Online*

Se cere:

a. să se interpreteze valoarea estimată a raportului de corelaţie multiplă;

b. să se testeze semnificaţia raportului de corelaţie multiplă, considerând un risc $\alpha=0,05$.

Rezolvare

a. Estimaţia raportului de corelaţie multiplă

Valoarea estimată a raportului de corelaţie multiplă este $R=0,868$.

Interpretare

Această valoare indică o legătură puternică între variabila dependentă *Rata de activitate feminină* şi variabilele independente *Salariul mediu nominal net lunar obţinut de persoanele masculine, Rata de ocupare masculină* şi *Numărul de copii în vârstă de până la patru ani.*

b. Testarea semnificaţiei raportului de corelaţie multiplă

Formularea ipotezelor

H_o: $\eta=0$ (nu există legătură între variabila dependentă şi variabilele independente).

H_1: $\eta>0$ (există legătură între variabila dependentă şi variabilele independente).

Alegerea pragului de semnificaţie a testului

$\alpha=0,05$.

Alegerea statisticii test

Pentru testarea semnificaţiei raportului de corelaţie multiplă, se foloseşte statistica Fisher: $F=\frac{\hat{\eta}^2}{1-\hat{\eta}^2}\cdot\frac{n-k}{k-1}$.

Valoarea teoretică a testului

$F_{\alpha;k-1;n-k}$ se citeşte din tabelul Fisher.

Modelul de regresie liniară multiplă este de forma $Y=\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_2+\beta_3X_3+\varepsilon$, prin urmare, pentru un risc $\alpha=0,05$, se citeşte valoarea teoretică $F_{0,05;4-1;40-4}=2,839$.

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Calculul statisticii test

$$F_{calc} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-k}{k-1} = \frac{0,753}{1-0,753} \cdot \frac{40-4}{4-1} = 36,58.$$

Stabilirea regulii de decizie

- dacă $F_{calc} \leq F_{\alpha;k-1;n-k}$ se acceptă ipoteza H_0;
- dacă $F_{calc} > F_{\alpha;k-1;n-k}$ se respinge ipoteza H_0, cu o probabilitate de 0,95.

Interpretarea rezultatelor

$F_{calc} = 36,58 > F_{0,05;4-1;40-4} = 2,839$.

Acest rezultat conduce la decizia de a respinge ipoteza H_0. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că valoarea raportului de corelație multiplă este semnificativ diferită de zero. *Rata de activitate feminină* în 40 de județe ale României este influențată în mod semnificativ de variația simultană a *Salariului mediu nominal net lunar obținut de persoanele masculine,* a *Ratei de ocupare masculină* şi a *Numărului de copii în vârstă de până la patru ani.*

Problema 2

Se consideră un model econometric care explică variația *Câştigului salarial mediu nominal lunar net* (Lei) în 40 de județe ale României, în anul 2005, în funcție de *Produsul intern brut* (milioane Lei); *Investițiile nete pe regiuni de dezvoltare* (milioane Lei); *Populația activă civilă* (mii persoane).

În urma prelucrării datelor, s-au obținut rezultatele din tabelul de mai jos:

Model Summary[b]

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,712[a]	,506	,465	47,81484	1,658

a. Predictors: (Constant), Populația activă civila (mii persoane), InvNete, PIB milioane RON

b. Dependent Variable: castigul salarial nominal mediu net

Sursa: *Date prelucrate din baza de date www.insse.ro/ Tempo-Online*

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Se cere:

a. să se interpreteze valoarea estimată a raportului de corelație multiplă;

b. să se interpreteze valoarea estimată a raportului de determinație multiplă;

c. să se interpreteze valoarea estimată a raportului de determinație multiplă ajustat.

Rezolvare

a. Estimația raportului de corelație multiplă

Valoarea estimată a raportului de corelație multiplă este: $R=0,712$.

Interpretare

Această valoare indică o legătură puternică între variabila dependentă *Câștigul salarial nominal mediu net* și variabilele independente *Produsul intern brut, Investițiile nete pe regiuni de dezvoltare* și *Populația activă civilă.*

b. Estimația raportului de determinație multiplă

Valoarea estimată a raportului de determinație este: $R^2 = 0,506$.

Interpretare

Această valoare arată că 50,6% din variația variabilei dependente *Câștigul salarial nominal mediu net* este explicată de variația simultană a variabilelor independente *Produsul intern brut, Investițiile nete pe regiuni de dezvoltare* și *Populația activă civilă.*

c. Estimația raportului de determinație multiplă ajustat

Valoarea estimată raportului de determinație ajustat este: $\overline{R}^2 = 0,465$ și se calculează după relația:

$$\overline{R}^2 = 1-(1-R^2)\frac{n-1}{n-k},$$

Pentru exemplul dat, avem:

$$\overline{R}^2 = 1-(1-R^2)\frac{n-1}{n-k} = 1-(1-0,506)\frac{40-1}{40-4} = 0,465.$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Interpretare

Această valoare arată că 46,5% din variația variabilei dependente *Câştigul salarial nominal mediu net* este explicată de variația simultană a variabilelor independente *Produsul intern brut, Investițiile nete pe regiuni de dezvoltare* şi *Populația activă civilă.*

Observație. Raportul de determinație multiplă ajustat are o importanță deosebită, atunci când se compară mai multe modele de regresie, cu un număr diferit de parametri. Raportul de determinație multiplă ajustat este întotdeauna mai mic sau egal cu raportul de determinație multiplă.

Problema 3

Se consideră un model econometric care explică variația *Câştigului salarial mediu nominal lunar net* (Lei) în 40 din județele României, în anul 2005, în funcție de *Produsul intern brut* (milioane Lei); *Investițiile nete pe regiuni de dezvoltare* (milioane Lei); *Populația activă civilă* (mii persoane).

Rezultatele modelării se prezintă în tabelul de mai jos.

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	84432,652	3	28144,217	12,310	,000[a]
	Residual .	82305,323	36	2286,259		
	Total	166738,0	39			

a. Predictors: (Constant), Populația activă civila (mii persoane), InvNete, PIB milioane RON

b. Dependent Variable: castigul salarial nominal mediu net

Sursa: *Date prelucrate din baza de date www.insse.ro/ Tempo-Online*

Se cere să se testeze modelul de regresie liniară multiplă.

Rezolvare

Formularea ipotezelor

$H_0 : \beta_0 = \beta_1 = ... = \beta_p = 0$ (modelul nu este semnificativ).

H_1: nu toți coeficienții de regresie sunt simultan egali cu zero (modelul este semnificativ statistic).

Alegerea pragului de semnificație a testului
$\alpha=0,05$.

Alegerea statisticii test

Pentru testarea semnificației modelului de regresie liniară multiplă se folosește statistica Fisher:

$$F=\frac{\hat{V}_E}{\hat{V}_R}\cdot\frac{n-k}{k-1}.$$

Valoarea teoretică a testului

$F_{\alpha;k-1;n-k}$ se citește din tabelul Fisher.

Pentru un risc $\alpha=0,05$, se citește valoarea teoretică $F_{0,05;4-1;40-4}=2,839$.

Calculul statisticii test

$$F_{calc}=\frac{ESS}{RSS}\cdot\frac{n-k}{k-1}=\frac{84432,652}{82305,323}\cdot\frac{40-4}{4-1}=12,31.$$

Stabilirea regulii de decizie

- dacă $F_{calc}\le F_{\alpha;k-1;n-k}$, se acceptă ipoteza H_0;
- dacă $F_{calc}>F_{\alpha;k-1;n-k}$, se respinge ipoteza H_0, cu o probabilitate de 0,95.

Interpretarea rezultatelor

$F_{calc}=12,31>F_{0,05;4-1;40-4}=2,839$.

Acest rezultat conduce la decizia de a respinge ipoteza H_0. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că modelul de regresie liniară multiplă este semnificativ statistic. Variabila dependentă *Câștigul salarial mediu nominal lunar net* este influențată semnificativ de variația simultană a variabilelor independente *Produsul intern brut*, *Investițiile nete pe regiuni de dezvoltare* și *Populația activă civilă*.

Problema 4

Se consideră un model econometric care explică variația *Câștigului salarial mediu nominal lunar net* (Lei) în 40 de județe ale României, în anul 2005, în funcție de *Produsul intern brut* (milioane

BUCHAREST UNIVERSITY LIBRARY

Lei); *Investiţiile nete pe regiuni de dezvoltare* (milioane Lei); *Populaţia activă civilă* (mii persoane).

În urma prelucrării datelor, s-au obţinut rezultatele din tabelul de mai jos:

Correlations

		castigul salarial nominal mediu net	PIB milioane RON	InvNete	Populaţia activă civila (mii persoane)
Pearson Correlatio	castigul salarial nominal mediu net	1,000	,614	-,186	,502
	PIB milioane RON	,614	1,000	,067	,916
	InvNete	-,186	,067	1,000	-,115
	Populaţia activă civila (mii persoane	,502	,916	-,115	1,000
Sig. (1-tailed)	castigul salarial nominal mediu net	.	,000	,125	,000
	PIB milioane RON	,000	.	,340	,000
	InvNete	,125	,340	.	,239
	Populaţia activă civila (mii persoane	,000	,000	,239	.
N	castigul salarial nominal mediu net	40	40	40	40
	PIB milioane RON	40	40	40	40
	InvNete	40	40	40	40
	Populaţia activă civila (mii persoane	40	40	40	40

Sursa: *Date prelucrate din baza de date www.insse.ro/ Tempo-Online*

Se cere:

a. să se interpreteze valoarea estimată a coeficienţilor de corelaţie bivariată;

b. să se testeze nivelul de semnificaţie a coeficienţilor de corelaţie bivariată.

Rezolvare

a. Estimaţia coeficienţilor de corelaţie bivariată

Valorile estimate ale coeficienţilor de corelaţie bivariată (*Pearson Correlation*) sunt prezentate, sub formă matriceală, în primul rând al tabelului de mai sus.

Valoarea estimată a coeficientului de corelaţie bivariată dintre variabila dependentă *câştigul salarial mediu nominal lunar net* şi variabila independentă *Produsul intern brut* este: $r_{y1} = 0,614$.

Interpretare

Această valoare indică o legătură relativ puternică, directă, între variabila dependentă *Câştigul salarial nominal mediu net* şi variabila independentă *Produsul intern brut.*

Valoarea estimată a coeficientului de corelaţie bivariată dintre variabila dependentă *Câştigul salarial mediu nominal lunar net* şi variabila independentă *Investiţiile nete pe regiuni de dezvoltare* este: $r_{y2} = -0,186$.

Interpretare

Această valoare indică o legătură slabă, inversă, între variabila dependentă *Câştigul salarial nominal mediu net* şi variabila independentă *Investiţiile nete pe regiuni de dezvoltare.*

Similar, se citesc din tabelul de rezultate şi se interpretează valorile estimate ale coeficienţilor de corelaţie bivariată $r_{y3} = 0,502$, $r_{12} = 0,067$, $r_{13} = 0,916$ şi $r_{23} = -0,115$.

b. Testarea semnificaţiei coeficienţilor de corelaţie bivariată

Formularea ipotezelor

$H_0 : \rho = 0$ (între variabile, nu există o legătură semnificativă).

$H_1 : \rho \neq 0$ (între variabile, există o legătură semnificativă).

Alegerea pragului de semnificaţie a testului

α=0,05.

Alegerea statisticii test

Se alege statistica *Student*, cu relaţiile:

$$t = \frac{\hat{\rho}_{yx_1}}{\sqrt{\frac{1-\hat{\rho}^2_{yx_1}}{n-2}}}, \quad t = \frac{\hat{\rho}_{yx_2}}{\sqrt{\frac{1-\hat{\rho}^2_{yx_2}}{n-2}}}, \quad t = \frac{\hat{\rho}_{yx_3}}{\sqrt{\frac{1-\hat{\rho}^2_{yx_3}}{n-2}}},$$

$$t = \frac{\hat{\rho}_{x_1x_2}}{\sqrt{\frac{1-\hat{\rho}^2_{x_1x_2}}{n-2}}}, \quad t = \frac{\hat{\rho}_{x_1x_3}}{\sqrt{\frac{1-\hat{\rho}^2_{x_1x_3}}{n-2}}}, \quad t = \frac{\hat{\rho}_{x_2x_3}}{\sqrt{\frac{1-\hat{\rho}^2_{x_2x_3}}{n-2}}}.$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Valoarea teoretică a statisticii test

$t_{\alpha/2;n-k}$ se citeşte din tabelul *Student*. Pentru exemplul dat, considerând un risc $\alpha=0,05$, se citeşte valoarea $t_{\alpha/2,n-2}=t_{0,025;40-2}=1,96$.

Calculul statisticii test

Pentru exemplul considerat, statistica *Student* se calculează astfel:

- pentru parametrul ρ_{y1}:

$$t_{calc}=\frac{r_{y1}}{\sqrt{\frac{1-r_{y1}^2}{n-2}}}=\frac{0,614}{\sqrt{\frac{1-0,614^2}{40-2}}}=4,795;$$

- pentru parametrul ρ_{y2}:

$$t_{calc}=\frac{r_{y2}}{\sqrt{\frac{1-r_{y2}^2}{n-2}}}=\frac{-0,186}{\sqrt{\frac{1-(-0,186)^2}{40-2}}}=-1,167;$$

În mod similar, se determină valorile calculate ale statisticii *Student* pentru parametrii ρ_{y3} ($t_{calc}=3,578$), ρ_{12} ($t_{calc}=0,414$), ρ_{13} ($t_{calc}=14,075$) şi ρ_{23} ($t_{calc}=-0,714$).

Stabilirea regulii de decizie

- dacă $|t_{calc}|\le t_{\alpha/2;n-2}$ se acceptă ipoteza H_0;
- dacă $|t_{calc}|>t_{\alpha/2;n-2}$, se respinge ipoteza H_0, cu o probabilitate de 0,95.

Altfel,

- dacă $sig\ge\alpha$, atunci se acceptă ipoteza H_0;
- dacă $sig<\alpha$, atunci se respinge ipoteza H_0, cu o probabilitate de 0,95.

Interpretarea rezultatelor

- pentru parametrul ρ_{y1}:

$|t_{calc}|=4,795>t_{0,025;38}=1,96$ sau $sig=0<\alpha=0,05$. Acest rezultat permite luarea deciziei de a respinge ipoteza H_0 cu un risc de 0,05. Se poate

garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul ρ_{y1} este semnificativ diferit de zero;

- pentru parametrul ρ_{y2}:

$|t_{calc}| = 1,167 < t_{0,025;38} = 1,96$, iar $sig = 0,125 > \alpha = 0,05$. Acest rezultat permite luarea deciziei de a nu respinge ipoteza H_0. Prin urmare parametrul ρ_{y2} nu este semnificativ diferit de zero;

În mod similar, se interpretează rezultatele testării parametrilor ρ_{y3}, ρ_{12}, ρ_{13} și ρ_{23}.

Problema 5

Se consideră un model econometric care explică variația *Populației ocupate civile* (persoane) în 40 de județe ale României, în anul 2005, în funcție de *Salariul mediu nominal lunar net* (Lei), *Produsul intern brut* (mii Lei).

Calculul coeficienților de corelație bivariată și a coeficienților corelație parțială, care se realizează pe rând prin controlul influenței unei variabile independente, se prezintă în tabelele de mai jos.

Correlations

		Populatia ocup civila total persoane	castigul salarial nominal mediu net	PIB milioane RON
Populatia ocup civila total persoane	Pearson Correlation	1	,490**	,919**
	Sig. (2-tailed)		,001	,000
	N	40	40	40
castigul salarial nominal mediu net	Pearson Correlation	,490**	1	,614**
	Sig. (2-tailed)	,001		,000
	N	40	40	40
PIB milioane RON	Pearson Correlation	,919**	,614**	1
	Sig. (2-tailed)	,000	,000	
	N	40	40	40

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Sursa: *Date prelucrate din baza de date www.insse.ro/ Tempo-Online*

BCU "CAROL I" UNIVERSITY LIBRARY

Correlations

Control Variables			Populatia ocup civila total persoane	castigul salarial nominal mediu net
PIB milioane RON	Populatia ocup civila total persoane	Correlation	1,000	-,238
		Significance (2-tailed)	.	,144
		df	0	37
	castigul salarial nominal mediu net	Correlation	-,238	1,000
		Significance (2-tailed)	,144	.
		df	37	0

Sursa: *Date prelucrate din baza de date www.insse.ro/ Tempo-Online*

Correlations

Control Variables			Populatia ocup civila total persoane	PIB milioane RON
castigul salarial nominal mediu net	Populatia ocup civil total persoane	Correlation	1,000	,899
		Significance (2-tailed)	.	,000
		df	0	37
	PIB milioane RON	Correlation	,899	1,000
		Significance (2-tailed)	,000	.
		df	37	0

Sursa: *Date prelucrate din baza de date www.insse.ro/ Tempo-Online*

Se cere:

a. să se calculeze şi interpreteze coeficientul de corelaţie multiplă pe baza coeficienţilor de corelaţie bivariată;

b. să se interpreteze coeficienţii de corelaţie parţială.

Rezolvare

a. Estimarea coeficienţilor de corelaţie bivariată şi a coeficientului de corelaţie multiplă

Valorile estimate ale coeficienţilor de corelaţie bivariată sunt prezentate sub formă matriceală în primul tabel de mai sus.

Valoarea estimată a coeficientului de corelaţie bivariată dintre variabila dependentă *Populaţia ocupată civilă* şi variabila independentă *Câştigul salarial mediu nominal lunar net* este: $r_{y1} = 0,490$.

Valoarea estimată a coeficientului de corelație bivariată dintre variabila dependentă *Populația ocupată civilă* și variabila independentă *Produsul intern brut* este: $r_{y2} = 0,919$.

Valoarea estimată a coeficientului de corelație bivariată dintre variabila independentă *Câștigul salarial mediu nominal lunar net* și variabila independentă *Produsul intern brut* este: $r_{12} = 0,614$.

Coeficientul de corelație multiplă se calculează cu relația:

$$r = \sqrt{\frac{r_{y1}^2 + r_{y2}^2 - 2r_{y1}r_{y2}r_{12}}{1 - r_{12}^2}}$$

Rezultă:

$$r = \sqrt{\frac{0,490^2 + 0,919^2 - 2 \cdot 0,490 \cdot 0,919 \cdot 0,614}{1 - 0,614^2}} =$$

$$= 0,924$$

Interpretare

Această valoare indică o legătură foarte strânsă între variabila dependentă *Populația activă civilă* și variabilele independente *Câștigul salarial nominal mediu net* și *Produsul intern brut*.

b. Estimarea și interpretarea coeficienților de corelație parțială

Valorile estimate ale coeficienților de corelație parțială (coeficienți de corelație între oricare două variabile incluse în model atunci când influența celorlalte variabile este menținută constantă) sunt prezentate în tabelele de mai sus.

Valoarea coeficientului de corelație parțială dintre variabila dependentă *Populația ocupată civilă* și variabila independentă *Câștigul salarial nominal mediu net*, atunci când influența celeilalte variabile independente *Produsul intern brut* este menținută constantă, este: $r_{y1.2} = -0,238$.

Interpretare

Această valoare indică o legătură slabă, inversă, între variabila dependentă *Populația ocupată civilă* și variabila independentă *Câștigul salarial nominal mediu net*, atunci când influența variabilei independente *Produsul intern brut* este menținută constantă.

Valoarea coeficientului de corelaţie parţială dintre variabila dependentă *Populaţia ocupată civilă* şi variabila independentă *Produsul intern brut*, atunci când influenţa celeilalte variabile independente *Câştigul salarial nominal mediu net* este menţinută constantă, este: $r_{y2.1} = 0,899$.

Interpretare

Această valoare indică o legătură puternică, directă, între variabila dependentă *Populaţia ocupată civilă* şi variabila independentă *Produsul intern brut*, atunci când influenţa variabilei independente *Câştigul salarial nominal mediu net* este menţinută constantă.

2.2.2. Teste grilă

1. Se consideră modelul de regresie liniară multiplă cu două variabile independente: $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$.

Coeficientul de corelaţie multiplă se calculează după relaţia:

a) $r_{y12} = \sqrt{\dfrac{r_{y1}^2 + r_{y2}^2 - 2r_{y1}r_{y2}r_{12}}{1 - r_{12}}}$

b) $r_{y12} = \sqrt{\dfrac{r_{y1} + r_{y2} - 2r_{y1}r_{y2}r_{12}}{1 - r_{12}}}$

c) $r_{y12} = \sqrt{\dfrac{r_{y1}^2 + r_{y2}^2 - 2r_{y1}r_{y2}r_{12}}{1 - r_{12}^2}}$

d) $r_{y12} = \sqrt{\dfrac{r_{y1}^2 + r_{y2}^2 - r_{y1}r_{y2}r_{12}}{1 - r_{12}}}$

2. Se consideră modelul de regresie liniară multiplă de forma: $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$.

Precizaţi care din afirmaţiile următoare sunt adevărate:

a) se pot estima 3 coeficienţi de corelaţie parţială pentru modelul considerat

b) se pot estima 3 coeficienţi de corelaţie bivariată pentru modelul considerat

c) se pot estima 3 coeficienți de corelație multiplă pentru modelul considerat
d) se pot estima 2 raporturi de corelație bivariată pentru modelul considerat

3. Se consideră modelul de regresie liniară multiplă:
$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$.
Precizați care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate:
a) raportul de determinație multiplă este mai mic decât raportul de corelație multiplă
b) raportul de determinație multiplă ajustat este mai mic decât raportul de corelație multiplă
c) raportul de determinație multiplă ajustat este mai mic sau egal cu raportul de determinație multiplă
d) se pot estima 5 coeficienți de corelație bivariată pentru modelul considerat

4. În studiul intensității legăturii dintre variabila dependentă Y și două variabile independente X_1 și X_2 s-au obținut rezultatele din tabelul următor:

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,276[a]	,076	,068	,37125085

a. Predictors: (Constant), x1, x2

Considerând rezultatele de mai sus, putem afirma că:
a) între variabilele independente există o legătură slabă
b) variația medie a variabilei dependente este explicată în proporție de 27,6% de variația simultană a variabilelor independente
c) estimația raportului de determinație multiplă ajustat este egală cu 0,068
d) coeficienții de corelație parțială sunt semnificativ diferiți de zero

BCU IAȘI - UNIVERSITY LIBRARY

5. Considerând rezultatele din tabelul de mai jos, precizaţi care dintre afirmaţiile următoare sunt corecte.

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	2,628	2	1,314	9,532	,000[a]
	Residual	31,976	232	,138		
	Total	34,603	234			

a. Predictors: (Constant), X1,X2

b. Dependent Variable: Y

a) modelul de regresie multiplă liniară cu două variabile independente este semnificativ statistic
b) raportul de corelaţie multiplă este semnificativ diferit de zero
c) raportul de determinaţie multiplă estimat este egal cu valoarea 0,76
d) raportul de determinaţie multiplă ajustat estimat este egal cu valoarea 0,05

6. În studiul legăturii dintre o variabilă dependentă, Y, şi trei variabile independente, X_1, X_2 şi X_3, s-a estimat un model de regresie de forma: $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \beta_3 \cdot X_3 + \varepsilon$.

Rezultatele analizei de corelaţie sunt prezentate mai jos.

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,884[a]	,781	,742	17,96398

a. Predictors: (Constant), X3, X1, X2

Pentru exemplul dat, sunt corecte afirmaţiile:
a) 88,4% din variaţia medie a variabilei dependente Y este explicată de variaţia simultană a variabilelor independente, X_1, X_2 şi X_3
b) 78,1% din variaţia medie a variabilei dependente Y este explicată de variaţia simultană a variabilelor independente, X_1, X_2 şi X_3
c) 78,1% din variaţia medie a variabilei dependente Y este explicată de variaţia independentă a variabilelor X_1, X_2 şi X_3

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

7. În studiul legăturii dintre o variabilă dependentă, Y, și trei variabile independente, X_1, X_2 și X_3, s-a estimat un model de regresie de forma: $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \beta_3 \cdot X_3 + \varepsilon$.

Rezultatele analizei de corelație sunt prezentate mai jos.

Correlations

		Y	X1	X2	X3
Y	Pearson Correlation	1	,678**	,628**	-,653**
	Sig. (2-tailed)		,001	,002	,001
	N	21	21	21	21
X1	Pearson Correlation	,678**	1	,270	-,270
	Sig. (2-tailed)	,001		,236	,237
	N	21	21	21	21
X2	Pearson Correlation	,628**	,270	1	-,452*
	Sig. (2-tailed)	,002	,236		,040
	N	21	21	21	21
X3	Pearson Correlation	-,653**	-,270	-,452*	1
	Sig. (2-tailed)	,001	,237	,040	
	N	21	21	21	21

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

*. Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

Pentru exemplul dat, sunt corecte afirmațiile:

a) coeficientul de corelație bivariată dintre variabila dependentă Y și variabila independentă X_1 este: $r_{y1}=0,678$

b) coeficientul de corelație bivariată dintre variabila dependentă Y și variabila independentă X_1 este: $r_{y1}=0,001$

c) coeficientul de corelație bivariată dintre variabila dependentă Y și variabila independentă X_1 este semnificativ statistic, cu o probabilitate de 0,95

8. În studiul legăturii dintre o variabilă dependentă, Y, și trei variabile independente, X_1, X_2 și X_3, s-a estimat un model de regresie de forma: $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \beta_3 \cdot X_3 + \varepsilon$.

Rezultatele analizei de corelație sunt prezentate mai jos.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Correlations

		Y	X1	X2	X3
Y	Pearson Correlation	1	,678**	,628**	-,653**
	Sig. (2-tailed)		,001	,002	,001
	N	21	21	21	21
X1	Pearson Correlation	,678**	1	,270	-,270
	Sig. (2-tailed)	,001		,236	,237
	N	21	21	21	21
X2	Pearson Correlation	,628**	,270	1	-,452*
	Sig. (2-tailed)	,002	,236		,040
	N	21	21	21	21
X3	Pearson Correlation	-,653**	-,270	-,452*	1
	Sig. (2-tailed)	,001	,237	,040	
	N	21	21	21	21

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

*. Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

Valoarea şi interpretarea corectă a estimaţiei coeficientului de corelaţie bivariată dintre variabila dependentă Y şi variabila independentă X_3 sunt:

a) $r_{y3}=0,001$ şi arată că legătura dintre variabila dependentă Y şi variabila independentă X_3 este o legătură directă, slabă

b) $r_{y3}= -0,653$ şi arată că legătura dintre variabila dependentă Y şi variabila independentă X_3 este o legătură inversă, puternică

c) $r_{y3}=0,653$ şi arată că legătura dintre variabila dependentă Y şi variabila independentă X_3 este o legătură directă, puternică

9. În studiul legăturii dintre o variabilă dependentă, Y, şi trei variabile independente, X_1, X_2 şi X_3, s-a estimat un model de regresie de forma: $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \beta_3 \cdot X_3 + \varepsilon$.

Rezultatele analizei de corelaţie sunt prezentate mai jos.

Correlations

Control Variables			Y	X1
X2 & X3	Y	Correlation	1,000	,704
		Significance (2-tailed)	.	,001
		df	0	17
	X1	Correlation	,704	1,000
		Significance (2-tailed)	,001	.
		df	17	0

BCU IAŞI TRANSILVANIA LIBRARY

Valoarea şi interpretarea corectă a estimaţiei coeficientului de corelaţie parţială dintre variabila dependentă Y şi variabila independentă X_1 sunt:

a) $r_{y1.23}=0,704$ şi arată că legătura dintre variabila dependentă Y şi variabila independentă X_1 este o legătură directă, puternică, fără a lua în considerare influenţa celorlalte variabile X_2 şi X_3

b) $r_{y1.23}=0,001$ şi arată că legătura dintre variabila dependentă Y şi variabila independentă X_1 este o legătură directă, slabă, considerând constantă influenţa celorlalte variabile X_2 şi X_3

c) $r_{y1.23}=0,704$ şi arată că legătura dintre variabila dependentă Y şi variabila independentă X_1 este o legătură directă, puternică, în condiţiile în care se consideră constantă influenţa celorlalte variabile X_2 şi X_3

10. În studiul legăturii dintre o variabilă dependentă, Y, şi trei variabile independente, X_1, X_2 şi X_3, s-a estimat un model de regresie de forma: $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \beta_3 \cdot X_3 + \varepsilon$.

Rezultatele analizei de corelaţie sunt prezentate mai jos.

Correlations

Control Variables			Y	X1
X2 & X3	Y	Correlation	1,000	,704
		Significance (2-tailed)	.	,001
		df	0	17
	X1	Correlation	,704	1,000
		Significance (2-tailed)	,001	.
		df	17	0

Pentru exemplul dat, se poate considera că:

a) valoarea coeficientului de corelaţie parţială dintre variabila dependentă Y şi variabila independentă X_1 este semnificativă statistic, cu o probabilitate de 0,95

b) valoarea coeficientului de corelaţie parţială dintre variabila dependentă Y şi variabila independentă X_1 nu este semnificativă statistic, cu o probabilitate de 0,95

c) valoarea coeficientului de corelaţie parţială dintre variabila dependentă Y şi variabilele independente X_2 şi X_3 este semnificativă statistic, cu o probabilitate de 0,95

BCU "LUCIAN BLAGA" UNIVERSITY LIBRARY

Rezultate pentru testele grilă

Număr test	Răspunsuri corecte
1	c
2	a, b
3	a, b, c
4	c
5	a, b
6	b
7	a, c
8	b
9	c
10	a

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul 3

MODELE DE REGRESIE NELINIARĂ

1.	Modele liniarizabile
	Probleme rezolvate
	Teste grilă
2.	Modele polinomiale
	Probleme rezolvate
	Teste grilă

În acest capitol, sunt prezentate probleme rezolvate şi teste grilă care privesc modelarea fenomenelor economice cu ajutorul modelelor de regresie neliniară.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.1. Modele liniarizabile

Modelele liniarizabile sunt acele modele neliniare care, cu ajutorul funcției logaritm, pot fi liniarizate. Această transformare permite estimarea parametrilor modelului prin metoda celor mai mici pătrate.

Cele mai importante modele liniarizabile sunt: modelul putere, modelul hiperbolic (invers sau reciproc), modelul exponențial.

Forma generală a acestor modele este prezentată în tabelul de mai jos:

Tabelul 3.1. *Forma generală a modelelor liniarizabile*

Tipul modelului	Forma generală a modelului	Forma generală a modelului după liniarizare
Modelul putere	$Y = \beta_0 \cdot X^{\beta_1} \cdot e^{\varepsilon}$	$lnY = ln\beta_0 + \beta_1 \cdot lnX + \varepsilon$
Modelul hiperbolic	$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot \frac{1}{X} + \varepsilon$	$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X^* + \varepsilon$, unde $X^* = 1/X$
Modelul exponențial	$Y = \beta_0 \cdot \beta_1^{X} \cdot e^{\varepsilon}$	$lnY = ln\beta_0 + X \cdot ln\beta_1 + \varepsilon$

3.1.1. Probleme rezolvate

Problema 1

În studiul legăturii dintre variabilele *Speranța medie de viață* (*X*, ani) și *PIB/loc.* (*Y*, euro), pe baza datelor înregistrate pentru un eșantion de 109 țări ale lumii, s-a obținut reprezentarea grafică de mai jos.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

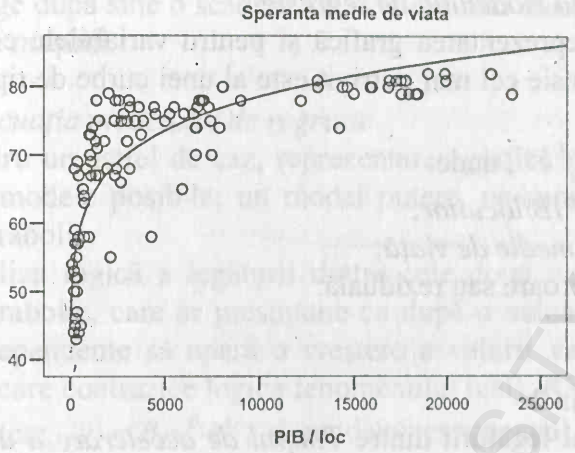


Figura 3.1. *Legătura dintre Speranța medie de viață (ani) și PIB/loc (euro) înregistrate în diferite țări ale lumii*
Sursa: *Prelucrat după baza de date World 95 a programului SPSS*

Se cere:

a. să se interpreteze graficul;
b. să se scrie ecuația teoretică a curbei care ajustează legătura dintre variabile.

Rezolvare

a. Interpretare grafic

Diagrama prezentată în Figura 3.1 arată că:

- pentru valori mici ale variabilei independente, *Speranța medie de viață* (*X*), o variație redusă a valorilor acesteia determină o variație mare a valorilor variabilei dependente, *PIB/loc.* (*Y*), însă până la un anumit prag.
- pentru valori mari ale variabilei independente X, indiferent de variațiile acesteia, la nivelul variabilei dependente, variațiile sunt foarte mici.

Așa cum rezultă din reprezentarea grafică de mai sus, legătura dintre cele două variabile este una de tip neliniar. Această reprezentare grafică corespunde și realității economice, potrivit căreia oricât de mult s-ar îmbunătăți rezultatele economice într-o țară și ar crește nivelul de trai, speranța de viață va crește, dar până la o anumită limită. Această creștere se realizează într-un ritm mai mic decât cel al valorii PIB.

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b. Ecuaţia modelului de regresie

Pentru reprezentarea grafică şi pentru variabilele considerate, modelul de regresie cel mai potrivit este al unei curbe de tip putere de forma:

$y_i = \beta_0 x_i^{\beta_1} e^{\varepsilon_i}$, unde:

Y este valoarea *PIB/locuitor*;
X este *Speranţa medie de viaţă*;
ε este variabila eroare sau reziduală.

Problema 2

În studiul legăturii dintre *Timpul de accelerare a unei maşini de la 0 la 100 km/h* (secunde) şi *Puterea motorului* (cai putere) pentru un eşantion de maşini, s-a obţinut reprezentarea grafică de mai jos.

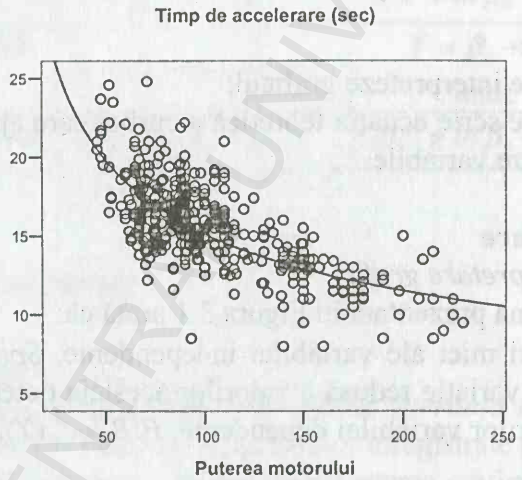


Figura 3.2. *Legătura dintre timpul de accelerare şi puterea motorului*
Sursa: *Prelucrat după baza de date World 95 a programului SPSS*

Se cere:

a. să se interpreteze graficul;
b. să se scrie ecuaţia teoretică a curbei care ajustează legătura dintre variabile.

Rezolvare

a. Interpretare grafic

Reprezentarea grafică de mai sus ne sugerează existenţa unei legături de tip neliniar între cele două variabile. Creşterea puterii mo-

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

torului atrage după sine o scădere, cu o viteză mai mare, a timpului de accelerare a maşinii.

b. Ecuaţia modelului de regresie

Pentru un astfel de caz, reprezentarea grafică ne poate sugera mai multe modele posibile: un model putere, un model exponenţial sau unul parabolic.

Analiza logică a legăturii dintre cele două variabile elimină modelul parabolic, care ar presupune ca după o valoare critică a variabilei independente să apară o creştere a valorii variabilei dependente (fapt care contrazice logica fenomenului real). Rămân în discuţie modelul putere, $y_i = \beta_0 x_i^{\beta_1} e^{\varepsilon_i}$, şi modelul exponenţial, $y_i = \beta_0 \beta_1^{x_i} e^{\varepsilon_i}$. Opţiunea pentru unul dintre cele două modele se realizează în urma procedeului de testare a modelelor estimate.

Problema 3

În studiul legăturii dintre *Indicele salariului real (%)* şi *Rata şomajului (%)* înregistrate în România, în perioada 1997 – 2006, s-a obţinut reprezentarea grafică de mai jos.

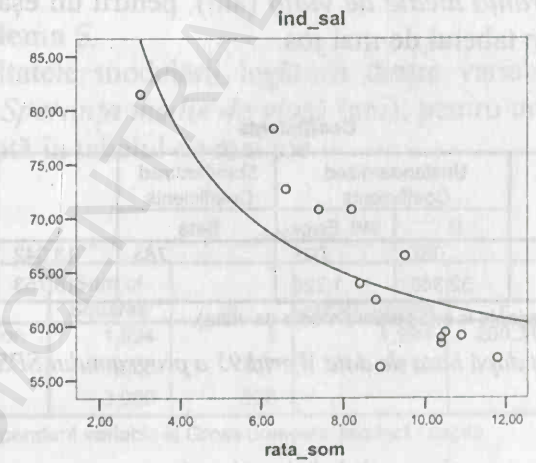


Figura 3.3. *Legătura dintre indicele salariului real şi rata şomajului în România, în perioada 1997 – 2006*

Sursa: *Prelucrat după datele din Anuarul Statistic al României, Institutul Naţional de Statistică, Bucureşti, 2007, www.insse.ro*

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Se cere:

a. să se interpreteze graficul;
b. să se scrie ecuaţia teoretică a curbei care ajustează legătura dintre variabile.

Rezolvare

a. Interpretare grafic

Teoria economică de specialitate (curba lui Philips) postulează că între indicele salariului real şi rata şomajului, există o legătură care poate fi explicată cu ajutorul unui model invers sau hiperbolic. Reprezentarea grafică pe baza datelor empirice realizată în figura de mai sus ne sugerează existenţa unei legături neliniare de tip hiperbolic.

b. Ecuaţia modelului de regresie

Ecuaţia modelului de regresie hiperbolic este de forma:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x_i} + \varepsilon_i .$$

Problema 4

Rezultatele modelării legăturii dintre variabilele *PIB pe locuitor* (\$) şi *Speranţa medie de viaţă* (ani), pentru un eşantion de 109 ţări, se prezintă în tabelul de mai jos.

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
ln(PIB / loc)	,087	,007	,783	13,042	,000
(Constant)	32,366	1,726		18,753	,000

The dependent variable is ln(Speranta medie de viata).

Sursa: *Prelucrat după baza de date World 95 a programului SPSS*

Se cere:

a. să se scrie ecuaţia modelului estimat;
b. să se interpreteze estimaţiile parametrilor modelului.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

a. Ecuația modelului estimat

Această ecuație se scrie pe baza datelor din tabelul de mai sus, utilizând rezultatele din coloana a doua: *„Unstandardized Coefficients"*, subcoloana *„B"*. Valorile din această coloană reprezintă estimații ale parametrilor modelului putere de forma:

$y_i = \beta_0 \cdot x_i^{\beta_1} \cdot e^{\varepsilon_i}$. Prin liniarizare, modelul devine:

$ln\, y_i = ln\, \beta_0 + \beta_1 ln\, x_i + \varepsilon_i$.

Valoarea $b_0 = 32{,}366$ este estimația parametrului β_0, iar valoarea $b_1 = 0{,}087$ este estimația parametrului β_1. În concluzie, modelul estimat este dat de relația:

$$y_{x_i} = 32{,}366 \cdot x_i^{0{,}087}.$$

b. Interpretare estimații

Valoarea $b_0 = 32{,}366$ este speranța de viață medie estimată în condițiile unei valori a PIB/locuitor egală cu 1$.

Valoarea $b_1 = 0{,}087$ este elasticitatea variabilei *Speranța de viață*, în raport cu variabila *PIB/locuitor*. Aceasta arată că la o creștere cu 1% a *PIB/locuitor*, speranța de viață crește, în medie, cu 0,087%.

Problema 5

Rezultatele modelării legăturii dintre variabilele *PIB pe locuitor* ($) și *Speranța medie de viață* (ani), pentru un eșantion de 109 țări, se prezintă în tabelul de mai jos.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Regression	1,994	1	1,994	200,317	,000
Residual	1,065	107	,010		
Total	3,060	108			

The independent variable is Gross domestic product / capita.

Sursa: *Prelucrat după baza de date World 95 a programului SPSS*

Se cere:

a. să se calculeze și să se interpreteze valoarea estimată a raportului de corelație;

BCU "MIHAI EMINESCU" LIBRARY

b. să se calculeze şi să se interpreteze valoarea estimată a raportului de determinaţie;

c. să se calculeze şi să se interpreteze valoarea estimată a raportului de determinaţie ajustat.

Rezolvare

a. Estimaţia raportului de corelaţie

Pe baza datelor din tabelul de rezultate, valoarea estimată a raportului de corelaţie se determină astfel:

$$R = \sqrt{\frac{ESS}{TSS}} = \sqrt{\frac{1,994}{3,06}} = 0,807 \text{, unde:}$$

- *ESS* este estimaţia variaţiei explicate (*Explained Sum of Squares* sau *Regression Sum of Squares*);
- *TSS* este estimaţia variaţiei totale (*Total Sum of Squares*).

Interpretare

Valoarea $R = 0,807$ indică o legătură puternică între *PIB pe locuitor* şi *Speranţa medie de viaţă*.

b. Estimaţia raportului de determinaţie

Pe baza datelor din tabelul de rezultate, valoarea estimată a raportului de determinaţie se determină astfel:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{1,994}{3,06} = 0,651.$$

Interpretare

Valoarea $R^2 = 0,651$ indică faptul că 65,1% din variaţia variabilei dependente *Speranţa medie de viaţă* este explicată de variaţia variabilei independente *PIB pe locuitor*.

c. Estimaţia raportului de determinaţie ajustat

Pe baza datelor din tabelul de rezultate, valoarea estimată a raportului de determinaţie ajustat se determină astfel:

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{\frac{RSS}{n-k}}{\frac{TSS}{n-1}} = 1 - \frac{\frac{1,065}{107}}{\frac{3,06}{108}} = 0,65.$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Interpretare

Valoarea $\overline{R}^2 = 0{,}65$ arată că 65% din variația variabilei dependente *Speranța medie de viață* este explicată de variația variabilei independente *PIB pe locuitor.*

Observație. Raportul de determinație nu ține cont de numărul gradelor de libertate sau de numărul de parametri ai modelului. Atunci când numărul gradelor de libertate este redus, pentru luarea în considerare a numărului mic de observații față de numărul de factori explicativi ai modelului se recomandă folosirea raportului de determinație ajustat.

Problema 6

Rezultatele modelării legăturii dintre variabilele *Rata inflației (%)* și *Rata șomajului (%)*, la nivelul României, în perioada 1997 – 2006, sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1 / rata_som	1516,202	400,829	,801	3,783	,005
(Constant)	-183,135	59,785		-3,063	,016

Sursa: *Prelucrat după datele din Anuarul Statistic al României, Institutul Național de Statistică, București, 2007, www.insse.ro*

Se cere:

a. să se scrie ecuația modelului estimat;
b. să se interpreteze estimațiile parametrilor modelului.

Rezolvare

a. Ecuația modelului estimat

Conform datelor din tabelul de mai sus, variabila independentă din model apare prin funcția sa reciprocă sau inversă (în tabel apare ca variabilă independentă variabila *1/X*), astfel încât modelul de regresie corespunzător este un model de tip invers.

Ecuația modelului estimat este:

$y_{x_i} = -183{,}135 + 1516{,}202 \cdot \frac{1}{x_i}$, unde:

- *Y* este variabila dependentă, *Rata inflației*;
- *X* este variabila independentă, *Rata șomajului*.

b. Interpretare estimații

Valoarea b_0 =*-183,135* este *Rata inflației* medie estimată, în condițiile în care *Rata șomajului* tinde către infinit.

Valoarea b_1 = *1516,202* arată cu cât crește în medie *Rata inflației* la o creștere cu 1% a inversei *Ratei șomajului*. Altfel spus, această valoare arată cu cât scade în medie *Rata inflației* la o creștere cu 1% a *Ratei șomajului*.

Problema 7

Rezultatele modelării legăturii dintre variabilele *PIB pe locuitor* ($) și *Mortalitatea infantilă* (număr de copii decedați la 1000 de născuți vii), pentru un eșantion de 109 țări, se prezintă în tabelul de mai jos.

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
PIB/Locuitor	,980	,004	,441	245,000	,000
(Constant)	57,088	4,388		13,011	,000

The dependent variable is ln(mortalitatea infantila).

Sursa: *Prelucrat după baza de date World 95 a programului SPSS.*

Se cere:

a. să se scrie ecuația modelului estimat;
b. să se interpreteze estimațiile parametrilor modelului.

Rezolvare

a. Ecuația modelului estimat

Conform datelor din tabelul de mai sus, variabila dependentă apare în modelul liniar modificată prin funcția logaritm, ceea ce sugerează că modelul de regresie de bază este un model de tip exponențial.

Ecuația modelului estimat este:

$y_{x_i} = 57,088 \cdot 0,98^{x_i}$, unde:

- *Y* este variabila dependentă, reprezentată de *Mortalitatea infantilă;*
- *X* este variabila independentă, reprezentată de *PIB pe locuitor.*

Prin logaritmare, modelul devine:

$$ln\, y_{x_i} = ln\, 57{,}088 + x_i \cdot ln\, 0{,}98$$

b. Interpretare estimații

Valoarea $b_0 = 57{,}088$ este *Mortalitatea infantilă* medie estimată la un *PIB/loc* egal cu zero $.

Valoarea $lnb_1 = ln0{,}98 = -0{,}02$ este scăderea relativă medie estimată a *mortalității infantile* (exprimată în %) la o creştere cu 1 $ a *PIB/loc*. Cu alte cuvinte, *Mortalitatea infantilă* scade în medie cu *0,02%* (*ln0,98*), dacă *PIB/loc* creşte cu 1$.

Observație. Valoarea b_0 nu are semnificație economică reală, în cazul acestui model de regresie.

Problema 8

În urma prelucrării datelor privind legătura dintre variabilele *Indicele câştigului salarial real* (%) şi *Rata şomajului* (%), pentru datele înregistrate în România, în perioada 1991-2006, s-au obținut următoarele rezultate:

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1 / rata_somaj	130,888	44,287	,620	2,955	,010
(Constant)	51,492	6,458		7,973	,000

Sursa: *Prelucrat după datele din Anuarul Statistic al României, Institutul Național de Statistică, Bucureşti,* www.insse.ro

Se cere:

a. să se scrie ecuația modelului estimat;
b. să se estimeze prin interval de încredere parametrii modelului, considerând un risc $\alpha = 0{,}10$.

Rezolvare

a. Ecuația modelului estimat al legăturii dintre variabilele *Indicele câştigului salarial real* (%) şi *Rata şomajului* (%) este de forma:

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$y_{x_i} = b_0 + b_1 \cdot \frac{1}{x_i}$, unde:

- b_0 este estimaţia punctuală a parametrului β_0;
- b_1 este estimaţia punctuală a parametrului β_1.

Ecuaţia modelului estimat al legăturii dintre cele două variabile este:

$$Y_X = 51{,}492 + 130{,}888 \cdot \frac{1}{X}.$$

b. Intervalul de încredere pentru parametrii modelului

Intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_0 este definit de relaţia:

$[b_0 \pm t_{\alpha/2;n-2} \cdot s_{\hat{\beta}_0}]$, unde:

- b_0=51,492;
- $t_{\alpha/2;n-2}$ este valoarea teoretică şi se citeşte din tabela *Student*. Pentru un risc α=0,10 şi n-2=16-2=14 grade de libertate, valoarea corespunzătoare este: $t_{\alpha/2;n-2} = t_{0,05;14} = 1{,}761$.
- $s_{\hat{\beta}_0} = 6{,}458$ este estimaţia abaterii standard a estimatorului parametrului β_0.

În urma calculelor, intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_0 este:

$[51{,}492 \pm 1{,}761 \cdot 6{,}458]$, respectiv $[40{,}119;\ 62{,}864]$.

Interpretare

Se poate garanta cu o probabilitate de 0,90 că parametrul β_0 este acoperit de intervalul $[40{,}119;\ 62{,}864]$ %.

Intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_1 este definit de relaţia:

$[b_1 \pm t_{\alpha/2;n-2} \cdot s_{\hat{\beta}_1}]$, unde:

- b_1=130,888;
- $t_{\alpha/2;n-2}$ este valoarea teoretică care se citeşte din tabela *Student*. Pentru un risc α=0,10 şi n-2 grade de libertate, valoarea corespunzătoare este: $t_{\alpha/2;n-2} = t_{0,05;14} = 1{,}761$.

BCU "CAROL I" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- $s_{\hat{\beta}_1} = 44{,}287$ este estimația abaterii standard a estimatorului parametrului β_1.

În urma calculelor, intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_1 este: $[130{,}888 \pm 1{,}761 \cdot 44{,}287]$.

Interpretare

Se poate garanta cu o probabilitate de 0,90 că parametrul β_1 este acoperit de intervalul [*55,899; 208,877*] *%.*

Problema 9

În studiul legăturii dintre două variabile, *X* (u.m.) și *Y* (u.m.), modelul estimat pe baza datelor observate pentru un eșantion de volum *n=50* unități este de forma: $y_{x_i} = 2 + 1{,}5 \cdot \frac{1}{x_i}$. Cunoscând valorile estimate ale abaterilor standard ale estimatorilor parametrilor modelului de regresie, $s_{\hat{\beta}_0} = 0{,}232, s_{\hat{\beta}_1} = 0{,}142$, se cere să se calculeze limitele intervalului de încredere pentru parametrii modelului, pentru un risc $\alpha=0{,}05$.

Rezolvare

Intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_0 este definit de relația:

$[b_0 \pm t_{\alpha/2;n-2} \cdot s_{\hat{\beta}_0}]$, unde:

- $b_0=2$;
- $t_{\alpha/2;n-2}$ este valoarea teoretică care se citește din tabela *Student*. Pentru un risc $\alpha=0{,}05$ și *n-2* grade de libertate, valoarea corespunzătoare este: $t_{\alpha/2;n-2} = t_{0{,}025;50-2} = 1{,}96$.
- $s_{\hat{\beta}_0} = 0{,}232$.

În urma calculelor, intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_0 este: $[2 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}232]$ u.m.

Interpretare

Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul β_0 este acoperit de intervalul *[1,55; 2,45]* u.m.

BCU "MIHAI EMINESCU" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_1 este definit de relaţia:

$[b_1 \pm t_{\alpha/2;n-2} \cdot s_{\hat{\beta}_1}]$, unde:

- $b_1=1,5$;
- $t_{\alpha/2;n-2}$ este valoarea teoretică care se citeşte din tabela *Student*. Pentru un risc $\alpha=0,05$ şi $n-2$ grade de libertate, valoarea corespunzătoare este: $t_{\alpha/2;n-2} = t_{0,025;50-2} = 1,96$.
- $s_{\hat{\beta}_1} = 0,142$.

În urma calculelor, intervalul de încredere estimat pentru parametrul β_1 este: $[1,5 \pm 1,96 \cdot 0,142]$.

Interpretare

Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul β_1 este acoperit de intervalul *[1,22; 1,78]* u.m.

Problema 10

În urma prelucrării datelor la nivelul unui eşantion de volum $n=19$ unităţi, s-a estimat modelul: $y_{x_i} = 1,25 + 0,87 \cdot \frac{1}{x_i}$. Cunoscând valorile estimate ale abaterilor standard ale estimatorilor parametrilor modelului, $s_{\hat{\beta}_0} = 0,127$, $s_{\hat{\beta}_1} = 0,095$, se cere să se testeze semnificaţia parametrilor modelului. Se consideră un risc $\alpha=5\%$.

Rezolvare

Formularea ipotezelor

H_o: $\beta_0 = 0$ $(M(Y) = 0 / X = 0)$.

H_1: $\beta_0 \neq 0$ $(M(Y) \neq 0 / X = 0)$.

H_0: $\beta_1 = 0$ (între cele două variabile, nu există o legătură hiperbolică).

H_1: $\beta_1 \neq 0$ (între cele două variabile, există o legătură hiperbolică).

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Alegerea pragului de semnificație a testului $\alpha=0,05$.

Alegerea statisticii test

Se alege statistica *Student*: $t=\frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$, respectiv $t=\frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$.

Valoarea teoretică a statisticii test

Valoarea teoretică a statisticii, $t_{\alpha/2;n-k}$, se citește din tabelul *Student*. Pentru exemplul dat, considerând un risc $\alpha=0,05$, se citește valoarea $t_{\alpha/2,n-2}=t_{0,025;19-2}=2,11$.

Calculul statisticii test

Pentru exemplul considerat, statistica *Student* se calculează astfel:

- pentru parametrul β_0: $t_{calc}=\frac{b_0}{s_{\hat{\beta}_0}}=\frac{1,25}{0,127}=9,84$;
- pentru parametrul β_1: $t_{calc}=\frac{b_1}{s_{\hat{\beta}_1}}=\frac{0,87}{0,095}=9,16$.

Stabilirea regulii de decizie

- dacă $|t_{calc}|\leq t_{\alpha/2;n-2}$, se acceptă ipoteza H_0.
- dacă $|t_{calc}|>t_{\alpha/2;n-2}$, se respinge ipoteza H_0, cu o probabilitate de 0,95.

Interpretarea rezultatelor

- pentru parametrul β_0: $|t_{calc}|=9,84>t_{0,025;17}=2,11$. Acest rezultat permite luarea deciziei de a respinge ipoteza H_0 cu un risc de 0,05. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul β_0 este semnificativ diferit de zero.

- pentru parametrul β_1: $|t_{calc}|=9,16>t_{0,025;17}=2,11$. Acest rezultat permite luarea deciziei de a respinge ipoteza H_0 cu un risc de 0,05. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul β_1 este semnificativ diferit de zero.

BCU "MIHAI EMINESCU" UNIVERSITY LIBRARY

Problema 11

În studiul intensităţii legăturii dintre variabilele *Indicele câştigului salarial real* (%) şi *Rata şomajului* (%), pentru datele înregistrate în România, în perioada 1991 – 2006, s-au obţinut următoarele rezultate:

Model Summary

R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
,845	,714	,685	4,312

The independent variable is rata_somaj.

Sursa: *Prelucrat după datele din Anuarul Statistic al României, Institutul Naţional de Statistică, Bucureşti, www.insse.ro*

Se cere:

a. să se interpreteze valoarea estimată a raportului de corelaţie;

b. să se interpreteze valoarea estimată a raportului de determinaţie;

c. să se testeze semnificaţia raportului de corelaţie, considerând un risc $\alpha=0,05$.

Rezolvare

a. Estimaţia raportului de corelaţie

Valoarea estimată a raportului de corelaţie este: $R=0,845$.

Interpretare

Această valoare indică o legătură puternică între *Indicele câştigului salarial real* şi *Rata şomajului* în România.

b. Estimaţia raportului de determinaţie

Valoarea estimată a raportului de determinaţie este:

$R^2 = 0,714$.

Interpretare

Această valoare arată că 71,4% din variaţia *Indicelui câştigului salarial real* în România este explicată de variaţia *Ratei şomajului.*

c. Testarea semnificaţiei raportului de corelaţie

Formularea ipotezelor

H_0: $\eta = 0$ (nu există legătură între cele două variabile)

H_1: $\eta > 0$ (există legătură semnificativă între cele două variabile)

Alegerea pragului de semnificație a testului
$\alpha=0,05$.

Alegerea statisticii test

Pentru testarea semnificației raportului de corelație, se folosește statistica Fisher: $F = \frac{\hat{\eta}^2}{1-\hat{\eta}^2} \cdot \frac{n-k}{k-1}$.

Valoarea teoretică a testului

Valoarea teoretică a testului, $F_{\alpha;k-1;n-k}$, se citește din tabelul Fisher. Pentru un risc $\alpha=0,05$, se citește valoarea teoretică $F_{0,05;2-1;16-2} = 4,6$.

Calculul statisticii test

$$F_{calc} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-k}{k-1} = \frac{0,714}{1-0,714} \cdot \frac{16-2}{2-1} = 34,95.$$

Stabilirea regulii de decizie

- dacă $F_{calc} \leq F_{\alpha;k-1;n-k}$, se acceptă ipoteza H_0.
- dacă $F_{calc} > F_{\alpha;k-1;n-k}$, se respinge ipoteza H_0, cu o probabilitate de 0,95.

Interpretarea rezultatelor

$F_{calc} = 34,95 > F_{0,05;2-1;16-2} = 4,6$. Acest rezultat conduce la decizia de a respinge ipoteza H_0. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că raportul de corelație este semnificativ diferit de zero. Între valoarea indicelui câștigului salarial real și rata șomajului în România, există o legătură puternică.

BCU IASI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.1.2. Teste grilă

1. Cele mai importante modele liniarizabile sunt:
a) modelul putere
b) modelul hiperbolic
c) modelul exponențial
d) modelul polinomial

2. Forma generală a modelului putere este:
a) $Y = \beta_0 \cdot X^{\beta_1} \cdot e^{\varepsilon}$
b) $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot \frac{1}{X} + \varepsilon$
c) $Y = \beta_0 \cdot \beta_1^{X} \cdot e^{\varepsilon}$
d) $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X^2 + ... + \beta_p \cdot X^p + \varepsilon$

3. Forma generală a modelului hiperbolic este:
a) $Y = \beta_0 \cdot X^{\beta_1} \cdot \varepsilon$
b) $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot \frac{1}{X} + \varepsilon$
c) $Y = \beta_0 \cdot \beta_1^{X} \cdot \varepsilon$
d) $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X^2 + ... + \beta_p \cdot X^p + \varepsilon$

4. Forma generală a modelului exponențial este:
a) $Y = \beta_0 \cdot X^{\beta_1} \cdot \varepsilon$
b) $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot \frac{1}{X} + \varepsilon$
c) $Y = \beta_0 \cdot \beta_1^{X} \cdot e^{\varepsilon}$
d) $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X^2 + ... + \beta_p \cdot X^p + \varepsilon$

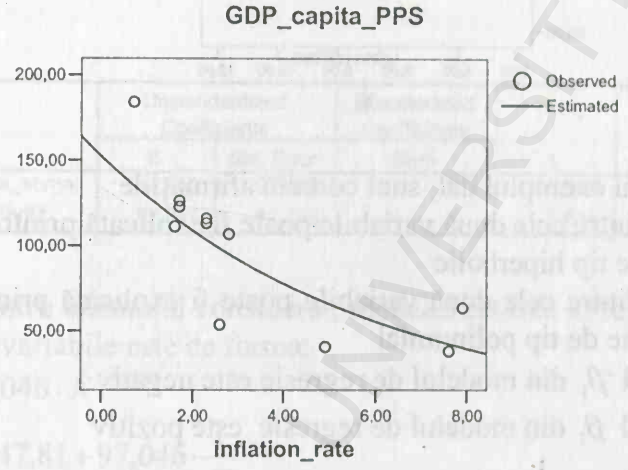
5. Forma generală a modelului polinomial de ordin p este:
a) $Y = \beta_0 \cdot X^{\beta_1} \cdot \varepsilon$
b) $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot \frac{1}{X} + \varepsilon$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) $Y = \beta_0 \cdot \beta_1^X \cdot \varepsilon$

d) $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X^2 + ... + \beta_p \cdot X^p + \varepsilon$

6. Datele privind *Rata inflației* (*inflation_rate*) și *PIB pe cap de locuitor* (*GDP_capita_PPS*), înregistrate pentru diferite țări ale Uniunii Europene, în anul 2006, sunt reprezentate în figura de mai jos.



Pentru exemplul dat, sunt corecte afirmațiile:

a) legătura dintre cele două variabile poate fi explicată printr-un model de regresie de tip exponențial

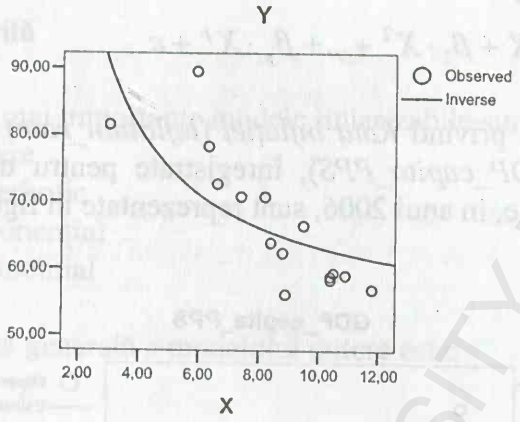
b) legătura dintre cele două variabile poate fi aproximată, pe cale grafică, printr-un model de regresie de tip polinomial

c) parametrul β_1 din modelul de regresie este subunitar

d) parametrul β_1 din modelul de regresie este supraunitar

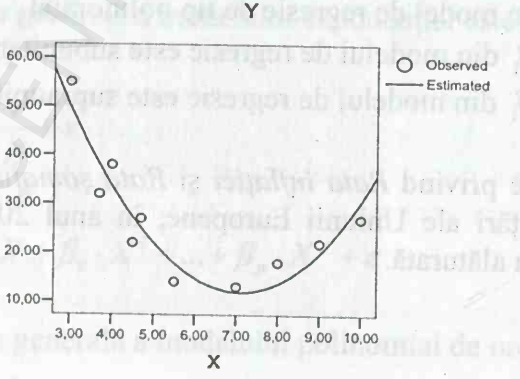
7. Datele privind *Rata inflației* și *Rata șomajului*, înregistrate pentru diferite țări ale Uniunii Europene, în anul 2006, sunt reprezentate în figura alăturată.

BCU IAȘI CENTRALĂ UNIVERSITARĂ LIBRARY



Pentru exemplul dat, sunt corecte afirmaţiile:
a) legătura dintre cele două variabile poate fi explicată printr-un model de regresie de tip hiperbolic
b) legătura dintre cele două variabile poate fi explicată printr-un model de regresie de tip polinomial
c) parametrul β_1 din modelul de regresie este negativ
d) parametrul β_1 din modelul de regresie este pozitiv

8. Datele privind *Costul unitar* (*Y, u.m.*) şi *Valoarea producţiei realizate* (*X, u.m.*), înregistrate pentru un eşantion de firme dintr-o localitate, sunt reprezentate în figura de mai jos.



Pentru exemplul dat, sunt corecte afirmaţiile:
a) legătura dintre cele două variabile poate fi explicată printr-un model de regresie de tip exponenţial

b) legătura dintre cele două variabile poate fi explicată printr-un model de regresie de tip polinomial

c) parametrul β_2 din modelul de regresie este negativ

d) parametrul β_2 din modelul de regresie este pozitiv

9. În studiul legăturii dintre *Rata inflației* (%) şi *Rata şomajului* (%), pentru datele înregistrate în România în perioada 1998 – 2005, s-au obținut următoarele rezultate:

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1 / rata_somaj	-547,810	102,033	-,910	-5,369	,002
(Constant)	97,046	12,742		7,616	,000

Pentru exemplul considerat, modelul estimat al legăturii dintre cele două variabile este de forma:

a) $Y = 97{,}046 \cdot X^{-547{,}81}$

b) $Y = -547{,}81 + 97{,}046 \cdot \dfrac{1}{X}$

c) $Y = 97{,}046 - 547{,}81 \cdot \dfrac{1}{X}$

10. În studiul legăturii dintre nivelul *Indicelui câştigului salarial real* (%) şi *Rata şomajului* (%), pentru datele înregistrate în România în perioada 1991 – 2005, s-au obținut următoarele rezultate:

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1 / rata_somaj	117.437	31.755	.716	3.698	.003
(Constant)	51.490	4.602		11.188	.000

Valorile estimate ale parametrilor modelului hiperbolic arată că:

a) nivelul indicelui câştigului salarial real scade, în medie, cu 117,437% la o creştere cu 1% a inversei ratei şomajului

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) nivelul indicelui câştigului salarial real creşte, în medie, cu 117,437% la o creştere cu 1% a inversei ratei şomajului
c) nivelul indicelui câştigului salarial real scade, în medie, cu 51,49% la o creştere cu 1% a inversei ratei şomajului

11. În urma prelucrării datelor înregistrate pentru două variabile, X şi Y, la nivelul unui eşantion format din 50 de firme, s-a estimat un model de forma $Y_X = b_0 + b_1 \cdot \frac{1}{X}$. Rezultatele obţinute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1 / Variabila_X	12,377	1,752	,905	7,066	,000
(Constant)	55,154	1,957		28,188	,000

Limitele intervalului de încredere pentru parametrul β_1 al modelului de regresie, considerând un risc α=*0,05*, sunt:
a) [11,312; 52,994]
b) [8,944; 15,81]
c) [7,597; 16,807]

12. În testarea ipotezelor statistice formulate asupra parametrilor modelului de regresie care explică legătura dintre *Rata inflaţiei* (%) şi *Rata şomajului* (%), pe baza datelor înregistrate în România, în perioada 1998 – 2005, s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1 / rata_somaj	-547,810	102,033	-,910	-5,369	,002
(Constant)	97,046	12,742		7,616	,000

Forma generală a modelului estimat este $Y_X = b_0 + b_1 \cdot \frac{1}{X}$. Pentru rezultatele obţinute, se poate considera că:

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

a) parametrul β_0 este semnificativ diferit de zero, cu o probabilitate de 0,95;
b) parametrul β_0 nu este semnificativ diferit de zero, cu o probabilitate de 0,95;
c) parametrul β_1 nu este semnificativ diferit de zero, cu o probabilitate de 0,25.

13. În studiul legăturii dintre variabilele *PIB pe cap de locuitor* și *Indicele dezvoltării umane* (*IDU*), pentru datele înregistrate în diferite țări ale Uniunii Europene în anul 2006, s-au obținut următoarele rezultate:

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
ln(IDU)	7,813	,531	,980	14,721	,000
(Constant)	192,769	12,100		15,931	,000

The dependent variable is ln(PIB_loc).

Modelul estimat al legăturii dintre cele două variabile este de forma:

a) $Y_X = 192{,}769 \cdot X^{7{,}813}$
b) $Y_X = 192{,}769 \cdot 7{,}813^X$
c) $\ln Y_X = \ln 192{,}769 + 7{,}813 \cdot \ln X$

14. În studiul legăturii variabilelor *PIB pe cap de locuitor* (u.m.) și *Indicele dezvoltării umane* (IDU), pentru datele înregistrate în diferite țări ale Uniunii Europene în anul 2006, s-au obținut următoarele rezultate:

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
ln(IDU)	7,813	,531	,980	14,721	,000
(Constant)	192,769	12,100		15,931	,000

The dependent variable is ln(PIB_loc).

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Valorile estimate ale parametrilor modelului de regresie arată că:
a) nivelul mediu estimat al PIB pe cap de locuitor este de 192,769 u.m., atunci când nivelul indicelui dezvoltării umane este egal cu unu
b) o creştere cu 1% a *Indicelui dezvoltării umane* determină o creştere, în medie, cu 7,813% a nivelului PIB pe cap de locuitor
c) o creştere cu 1% a valorii *IDU* determină o creştere, în medie, cu 7,813 unităţi a nivelului PIB pe cap de locuitor

15. În studiul legăturii dintre variabilele *PIB pe cap de locuitor (u.m)* şi *Indicele dezvoltării umane* (*IDU*), pentru datele înregistrate în diferite ţări ale Uniunii Europene, în anul 2006, s-a estimat un model de tip putere de forma: $Y_X = b_0 \cdot X^{b_1}$. În urma testării semnificaţiei parametrilor acestui model, s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
ln(IDU)	7,813	,531	,980	14,721	,000
(Constant)	192,769	12,100		15,931	,000

The dependent variable is ln(PIB_loc).

Pentru rezultatele obţinute, se poate considera că:
a) se respinge ipoteza H_0: $\beta_0 = 0$, cu o probabilitate de 0,95
b) parametrul β_0 este semnificativ diferit de zero, cu o probabilitate de 0,95
c) parametrul β_1 este semnificativ diferit de zero, cu o probabilitate de 0,95

16. În studiul legăturii dintre variabilele *PIB pe cap de locuitor* (u.m.) şi *Rata inflaţiei* (%), pentru datele înregistrate în diferite ţări ale Uniunii Europene, în anul 2006, s-au obţinut următoarele rezultate:

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
inflation_rate	,845	,036	,451	23,457	,000
(Constant)	152,143	26,106		5,828	,000

The dependent variable is ln(PIB_loc).

Modelul estimat al legăturii dintre cele două variabile este de forma:

a) $Y_X = 152{,}143 \cdot X^{0{,}845}$

b) $Y_X = 152{,}143 \cdot 0{,}845^X$

c) $lnY_X = ln152{,}143 + X \cdot ln0{,}845$

17. În studiul legăturii dintre variabilele *PIB pe cap de locuitor* (u.m.) şi *Rata inflaţiei* (%), pentru datele înregistrate în diferite ţări ale Uniunii Europene, în anul 2006, s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
inflation_rate	,845	,036	,451	23,457	,000
(Constant)	152,143	26,106		5,828	,000

The dependent variable is ln(PIB_loc).

Valorile estimate ale parametrilor modelului arată că:

a) nivelul mediu estimat al PIB pe cap de locuitor este de 152,143 u.m., atunci când nivelul ratei inflaţiei este zero

b) o creştere cu 1% a ratei inflaţiei determină o creştere, în medie, cu ln0,845% a nivelului PIB pe cap de locuitor

c) o creştere cu 1% a ratei inflaţiei determină o creştere, în medie, cu 0,845 unităţi a nivelului PIB pe cap de locuitor

18. În studiul intensităţii legăturii dintre variabilele *Rata inflaţiei* (%) şi *Rata şomajului* (%), pentru datele înregistrate în diferite ţări ale Uniunii Europene în anul 2006, s-au obţinut următoarele rezultate:

Model Summary

R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
,845	,714	,701	4,112

The independent variable is rata_somaj.

Valoarea estimată a raportului de corelație este:

a) 0,845
b) 0,714
c) 0,701

19. În studiul intensității legăturii dintre variabilele *Rata inflației* (%) și *Rata șomajului* (%), pentru datele înregistrate în diferite țări ale Uniunii Europene, în anul 2006, s-au obținut următoarele rezultate:

Model Summary

R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
,845	,714	,701	4,112

The independent variable is rata_somaj.

Valoarea estimată a raportului de determinație este:

a) 0,845
b) 0,714
c) 0,701

20. În studiul intensității legăturii dintre două variabile, *X* și *Y*, s-au obținut următoarele rezultate:

Model Summary

R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
,845	,714	,701	4,112

The independent variable is rata_somaj.

Pentru rezultatele de mai sus, sunt corecte afirmațiile:

a) între variabilele *X* și *Y*, există o legătură puternică
b) între variabilele *X* și *Y*, există o legătură slabă
c) 71,4% din variația variabilei *Y* este explicată prin variația variabilei *X*

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

21. În studiul intensității legăturii dintre două variabile, *X* și *Y*, s-au obținut următoarele rezultate:

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Regression	926,578	1	926,578	54,806	,000
Residual	371,942	22	16,906		
Total	1298,520	23			

The independent variable is rata_somaj.

Pentru rezultatele de mai sus, sunt corecte afirmațiile:

a) valoarea estimată a raportului de corelație este $R=0,713$

b) valoarea estimată a raportului de corelație este $R=0,845$

c) se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că valoarea raportului de corelație este semnificativ diferită de zero

22. Rezultatele modelării legăturii dintre variabilele *PIB/loc* ($) și *Speranța medie de viață* (ani), pentru un eșantion de țări, în anul 2007, sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
ln(PIB / loc)	.095	.007	.807	14.153	.000
(Constant)	32.713	1.761		18.573	.000

The dependent variable is ln(Speranta medie de viata).

Ecuația modelului estimat este:

a) $Y_X=32,71+0,095X$

b) $Y_X = 32,71 \cdot X^{0,095}$

c) $lnY_X=ln32,71+0,095lnX$

23. Rezultatele modelării legăturii dintre variabilele *PIB/loc* (\$) şi *Speranţa medie de viaţă* (ani), pentru un eşantion de ţări, în anul 2007, sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
ln(PIB / loc)	.095	.007	.807	14.153	.000
(Constant)	32.713	1.761		18.573	.000

The dependent variable is ln(Speranta medie de viata).

Valoarea estimată a coeficientului de regresie $b_1 = 0{,}095$ arată:
a) cu cât creşte în medie *Speranţa medie de viaţă* (ani), la o creştere cu 1 \$ a valorii *PIB/loc*
b) cu cât scade în medie *Speranţa medie de viaţă* (ani), la o creştere cu 1 \$ a valorii *PIB/loc*
c) creşterea medie procentuală a *Speranţei medii de viaţă*, la o creştere cu 1 % a valorii *PIB/loc*

24. Pentru variabilele *Indicele salariului real* (%) şi *Rata şomajului* (%), înregistrate în România în perioada 1990 – 2005, s-au obţinut rezultatele din tabelul de mai jos.

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1 / rata_somaj	103.302	23.109	.790	4.470	.001
(Constant)	52.029	3.305		15.743	.000

Estimaţia $b_1 = 103{,}302$ arată:
a) cu cât creşte *Indicele salariului real* dacă *Rata şomajului* creşte cu 1%
b) cu cât scade, în medie, *Indicele salariului real* dacă *Rata şomajului* creşte cu 1%
c) nivelul *Indicelui salariului real* când *Rata şomajului* este infinită

25. Pentru variabilele *Indicele salariului real* şi *Rata şomajului*, observate pentru România în perioada 1990 – 2005, s-au obţinut rezultatele din tabelul alăturat.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1 / rata_somaj	103.302	23.109	.790	4.470	.001
(Constant)	52.029	3.305		15.743	.000

Ecuația estimată a modelului de regresie este:

a) $Y_X = 52{,}029 + 103{,}30\,X$

b) $Y_X = 103{,}30 + 52{,}029\,X$

c) $Y_X = 52{,}029 + 103{,}302\,\frac{1}{X}$

26. Pentru variabilele *Indicele salariului real* şi *Rata şomajului*, observate pentru România, în perioada 1990 – 2005, s-au obținut rezultatele din tabelul de mai jos.

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1 / rata_somaj	103.302	23.109	.790	4.470	.001
(Constant)	52.029	3.305		15.743	.000

Estimația $b_0 = 52{,}029$ reprezintă:

a) valoarea estimată medie a *Indicelui salariului real* când *Rata şomajului* este egală cu zero

b) valoarea estimată medie a *Indicelui salariului real* când *Rata şomajului* tinde către infinit

c) valoarea estimată medie a *Indicelui salariului real* când *Rata şomajului* creşte cu un procent

BCU IASI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezultate pentru testele grilă

Număr test	Răspunsuri corecte
1	a, b, c
2	a
3	b
4	c
5	d
6	a, c
7	a, d
8	b, d
9	c
10	b
11	b
12	a
13	a, c
14	a, b
15	a, b, c
16	b, c
17	a, b
18	a
19	b
20	a, c
21	b, c
22	b, c
23	c
24	b
25	c
26	b

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.2. Modele polinomiale

Modelele polinomiale sunt modele de regresie neliniare reprezentate printr-o funcţie polinomială de un anumit ordin.

Forma generală a unei funcţii polinomiale de ordinul p este:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X^2 + ... + \beta_p \cdot X^p + \varepsilon .$$

Cele mai folosite modele polinomiale în modelarea legăturii dintre fenomenele economice sunt:

- Modelul parabolic (*Quadratic*)

Forma generală unui model parabolic este:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X^2 + \varepsilon .$$

- Modelul cubic

Forma generală unui model cubic este:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X^2 + \beta_3 \cdot X^3 + \varepsilon .$$

3.2.1. Probleme rezolvate

Problema 1

În studiul legăturii dintre *Gradul de urbanizare* (procentul de populaţie care locuieşte în oraşe) şi valoarea *PIB/loc.* (Euro), înregistrate în diferite ţări ale lumii, în anul 2007, s-a obţinut reprezentarea grafică alăturată.

BCU IASI/CEA AL UNIVERSITY LIBRARY

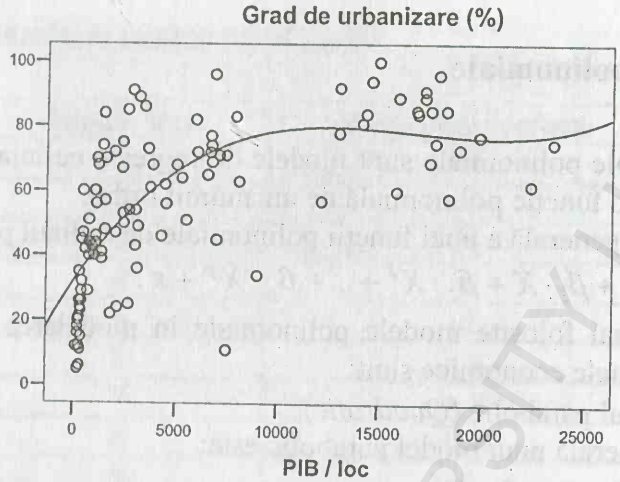


Figura 3.4. *Legătura dintre gradul de urbanizare şi PIB/loc, înregistrate în diferite ţări ale lumii, în anul 2007*
Sursa: *Prelucrat după baza de date World 95 a programului SPSS*

Se cere:

a. să se interpreteze graficul;
b. să se scrie ecuaţia teoretică a curbei care ajustează legătura dintre variabile.

Rezolvare

a. Interpretarea graficului

Aşa cum se observă din figura prezentată mai sus, între cele două variabile, există o legătură neliniară care poate fi explicată cu ajutorul unui polinom de gradul trei. Pe grafic, se observă două puncte de extrem, un maxim şi un minim, precum şi punctul de inflexiune. Variaţia sugerată de model are acoperire în logica variaţiei reale a fenomenului studiat: creşterea economică duce la urbanizare, dar până la un prag, după care este posibilă o scădere a procentului populaţiei urbane, datorită construirii zonelor rezidenţiale de la periferia oraşelor. Continuând dezvoltarea economică, aceste zone rezidenţiale sunt asimilate de oraşe, ca zone metropolitane, ajungându-se la mari aglomerări urbane, ceea ce generează din nou o creştere a populaţiei urbane.

b. Ecuaţia teoretică a modelului de regresie

Ecuaţia teoretică a modelului de regresie este un polinom de gradul trei de forma:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 + \varepsilon_i .$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Problema 2

Pentru variabilele *Investiții anuale* (mil. Euro) și *Profitul anual* (mld. Euro), înregistrate pentru un eșantion de 15 firme, s-au obținut rezultatele din tabelul de mai jos.

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
investitii	,156	,029	3,825	5,346	,000
investitii ** 2	-,001	,000	-3,384	-4,730	,000
(Constant)	-,910	,674		-1,351	,002

Sursa: *Date convenționale*

Se cere:

a. să se scrie ecuația modelului estimat;
b. să se interpreteze estimațiile parametrilor modelului.

Rezolvare

a. Ecuația modelului estimat

Datele din tabelul de mai sus indică rezultatele estimării pentru un model polinomial de gradul doi între cele două variabile.

Modelul estimat are ecuația:

$$y_{x_i} = -0,91 + 0,156x_i - 0,001x_i^2 .$$

b. Interpretare estimații

Cu excepția valorii $b_0 = -0,91$ (valoarea estimată medie a variabilei dependente când variabila independentă ia valoarea zero), valorile celorlalte două estimații nu au o interpretare directă, ci ajută la identificarea unor puncte critice, așa cum este, de exemplu, punctul de extrem al parabolei estimate.

Pe baza modelului obținut se poate stabili care este nivelul estimat al investițiilor care conduce la *profit* maxim (parabola are un maxim, deoarece $b_2 < 0$). Coordonatele punctului de maxim sunt: $(-\frac{b_1}{2b_2}; -\frac{b_1^2 - 4b_0b_2}{4b_2})$. Înlocuind cu valorile estimațiilor, se obține: (78; 5,17).

BCU CLUJ-NAPOCA UNIVERSITY LIBRARY

În concluzie, *profitul* maxim anual al unei firme este estimat la 5,17 mld. Euro, dacă *investiţiile* ating nivelul de 78 mil. Euro anual. Peste sau sub nivelul de 78 mil. Euro, *valoarea profitului* estimat este mai mică de 5,17 mld Euro.

Problema 3

În studiul legăturii dintre *Gradul de urbanizare* (procentul de populaţie care locuieşte în oraşe) şi *Gradul de dezvoltare economică (PIB/loc., Euro)* în diferite ţări, s-a obţinut reprezentarea grafică de mai jos.

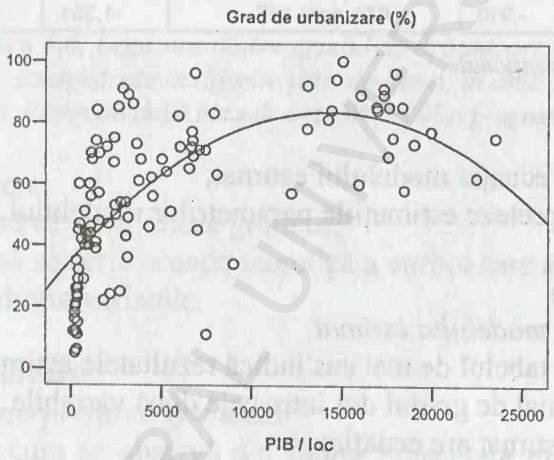


Figura 3.5. *Legătura dintre gradul de urbanizare şi PIB/loc în diferite ţări*
Sursa: *Prelucrat după baza de date World 95 a programului SPSS*

Se cere:

a. să se interpreteze graficul;
b. să se scrie ecuaţia teoretică a curbei care ajustează legătura dintre variabile.

Rezolvare

a. Interpretarea graficului

Aşa cum se observă din figura prezentată mai sus, între cele două variabile există o legătură neliniară care poate fi explicată cu ajutorul unui polinom de gradul doi. Pe grafic, se observă un punct de extrem, un punct de maxim. Variaţia sugerată de model are acoperire în logica variaţiei reale a fenomenului, cum ar fi, de exemplu, situaţia

unei țări ieșită din blocul comunist. Creșterea economică din perioada comunistă a fost însoțită și de un proces rapid și forțat de urbanizare. Căderea blocului comunist a stopat procesul de urbanizare și a condus chiar la un regres a acestuia (o parte din populația urbanizată forțată de sistemul comunist s-a întors în mediul rural), chiar și în condițiile în care gradul de dezvoltare economică s-a accentuat.

b. Ecuația teoretică a modelului de regresie

Ecuația modelului de regresie este:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon_i .$$

Problema 4

Pentru variabilele *Costul unitar* (lei) și *producția zilnică de costume* (sute bucăți), înregistrate pentru un eșantion de 15 firme producătoare, s-au obținut rezultatele din tabelul de mai jos:

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
productie	-25.795	3.895	-5.322	-6.623	.000
productie ** 2	2.114	.351	4.842	6.026	.001
(Constant)	89.041	9.231		9.646	.000

Sursa: *Date convenționale*

Se cere să se scrie ecuația modelului estimat și să se precizeze care este nivelul *producției* pentru care se obține *un cost unitar* optim.

Rezolvare

Ecuația modelului estimat

Modelul estimat este de forma unei parabole, care are ecuația: $Y_X = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$. Pe baza datelor din tabelul de mai sus, rezultă modelul: $Y_X = 89{,}041 - 25{,}795X + 2{,}114X^2$.

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

Nivelul producţiei pentru un cost minim

Ecuaţia de regresie estimată admite un punct de minim ($b_2>0$). Valoarea variabilei independente (*producţia*) corespunzătoare punctului de minim (*costului* minim) este:

$$-\frac{b_1}{2b_2}=\frac{25,795}{4,22}=6,11 \text{ sute bucăţi.}$$

Problema 5

În studiul legăturii dintre *Costul unitar al unui proces de producţie* (Y) şi *Cantitatea producţiei realizate* de o firmă timp de 10 zile (X), s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
var_X	-27,708	4,410	-5,480	-6,283	,000
var_X ** 2	1,920	,337	4,970	5,697	,001
(Constant)	115,347	13,087		8,814	,000

Sursa*: Date convenţionale*

Se cere:

a. să se scrie ecuaţia modelului estimat al legăturii dintre cele două variabile.

b. să se testeze semnificaţia parametrilor modelului, considerând un risc $\alpha=0,05$.

Rezolvare

a. Rezultatele din tabelul de mai sus indică existenţa unei legături parabolice între X şi Y.

Modelul estimat este:

$$y_{x_i}=115,347-27,708\cdot x_i+1,92\cdot x_i^2.$$

b. *Testarea semnificaţiei parametrilor modelului parabolic*

Formularea ipotezelor

H_0: $\beta_i=0$.

H_1: $\beta_i\neq 0$, cu $i=\overline{0,2}$.

Valoarea teoretică a testului

Valoarea teoretică a testului, $t_{\alpha/2;n-k}$, se citeşte din tabelul *Student*. Pentru un risc $\alpha = 0,05$, se citeşte valoarea teoretică a statisticii *Student*, $t_{\alpha/2,n-k} = t_{0,025;10-3} = 2,365$.

Calculul statisticii test

Pentru rezultatele obţinute, statistica test *Student* se calculează astfel:

- pentru parametrul β_0 : $t_{calc} = \dfrac{b_0}{s_{\hat{\beta}_0}} = \dfrac{115,347}{13,087} = 8,814;$

- pentru parametrul β_1 : $t_{calc} = \dfrac{b_1}{s_{\hat{\beta}_1}} = \dfrac{-27,708}{4,41} = -6,283;$

- pentru parametrul β_2 : $t_{calc} = \dfrac{b_2}{s_{\hat{\beta}_2}} = \dfrac{1,92}{0,337} = 5,697.$

Stabilirea regulii de decizie

- dacă $|t_{calc}| \le t_{\alpha/2;n-k}$, se acceptă ipoteza H_0;
- dacă $|t_{calc}| > t_{\alpha/2;n-k}$, se respinge ipoteza H_0, cu o probabilitate de 0,95.

Interpretarea rezultatelor

- pentru parametrul β_0 : $|t_{calc}| = 8,814 > t_{0,025;7} = 2,365$. Acest rezultat conduce la decizia de a respinge ipoteza H_0. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul β_0 este semnificativ diferit de zero;

- pentru parametrul β_1: $|t_{calc}| = 6,283 > t_{0,025;7} = 2,365$. Acest rezultat conduce la decizia de a respinge ipoteza H_0. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul β_1 este semnificativ diferit de zero;

- pentru parametrul β_2: $|t_{calc}| = 5,697 > t_{0,025;7} = 2,365$. Acest rezultat conduce la decizia de a respinge ipoteza H_0. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul β_2 este semnificativ diferit de zero.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În concluzie, modelul legăturii dintre cele două variabile, X şi Y, este de forma:

$$Y_X = 115{,}347 - 27{,}708 \cdot X + 1{,}92 \cdot X^2 .$$

Problema 6

În urma prelucrării datelor la nivelul unui eşantion de volum $n=75$ unităţi, pentru două variabile, X şi Y, s-a estimat un model de forma: $Y_X = 0{,}128 + 0{,}87 \cdot X + 0{,}32 \cdot X^2$. Cunoscând valorile estimate ale abaterilor standard ale estimatorilor parametrilor modelului, $s_{\hat{\beta}_0} = 0{,}13$, $s_{\hat{\beta}_1} = 0{,}06$, $s_{\hat{\beta}_2} = 0{,}02$, se cere să se testeze semnificaţia parametrilor modelului. Se consideră un risc $\alpha=0{,}05$.

Rezolvare

Formularea ipotezelor

H_0: $\beta_i = 0$.

H_1: $\beta_i \neq 0$, cu $i = \overline{0,2}$.

Calculul statisticii test

Pentru rezultatele obţinute, statistica *Student* se calculează astfel:

- pentru parametrul β_0 : $t_{calc} = \dfrac{b_0}{s_{\hat{\beta}_0}} = \dfrac{0{,}128}{0{,}13} = 0{,}98;$

- pentru parametrul β_1 : $t_{calc} = \dfrac{b_1}{s_{\hat{\beta}_1}} = \dfrac{0{,}87}{0{,}06} = 14{,}5$;

- pentru parametrul β_2 : $t_{calc} = \dfrac{b_2}{s_{\hat{\beta}_2}} = \dfrac{0{,}32}{0{,}02} = 16$.

Stabilirea regulii de decizie

- dacă $|t_{calc}| \leq t_{\alpha/2;n-k}$, se acceptă ipoteza H_0;
- dacă $|t_{calc}| > t_{\alpha/2;n-k}$, se respinge ipoteza H_0, cu o probabilitate de 0,95.

Valoarea teoretică a testului

Pentru un risc α = 0,05, se citeşte valoarea teoretică a statisticii *Student*, $t_{\alpha/2;n-k} = t_{0{,}025;75-3} = 1{,}96$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITARĂ LIBRARY

Interpretarea rezultatelor

- pentru parametrul β_0: $|t_{calc}| = 0,98 < t_{0,025;72} = 1,96$. Acest rezultat conduce la decizia de a accepta ipoteza H_0, adică parametrul β_0 nu este semnificativ diferit de zero.

- pentru parametrul β_1: $|t_{calc}| = 14,5 > t_{0,025;72} = 1,96$. Acest rezultat conduce la decizia de a respinge ipoteza H_0. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul β_1 este semnificativ diferit de zero.

- pentru parametrul β_2: $|t_{calc}| = 16 > t_{0,025;72} = 1,96$. Acest rezultat conduce la decizia de a respinge ipoteza H_0. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul β_2 este semnificativ diferit de zero.

Problema 7

În studiul legăturii dintre *Costul unitar al unui proces de producție* (Y) și *Producția realizată* de o firmă timp de 10 zile (X), s-a estimat un model parabolic de forma:

$$Y_X = 115,347 - 27,708 \cdot X + 1,92 \cdot X^2.$$

În urma analizei intensității legăturii dintre cele două variabile, s-au obținut următoarele rezultate:

Model Summary

R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
,938	,880	,845	4,685

The independent variable is var_X.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Regression	1122,846	2	561,423	25,577	,001
Residual	153,654	7	21,951		
Total	1276,500	9			

The independent variable is var_X.

Sursa: *Date convenționale*.

Se cere:

a. să se interpreteze valoarea estimată a raportului de corelație;
b. să se interpreteze valoarea estimată a raportului de determinație;

c. să se testeze semnificaţia raportului de corelaţie, considerând un risc $\alpha=0,05$.

Rezolvare

a. *Valoarea estimată a raportului de corelaţie* este: $R = 0,938$.

Interpretare

Această valoare arată că între variabilele X şi Y, există o legătură puternică (valoare apropiată de unu).

b. Valoarea estimată a raportului de determinaţie este:

$R^2 = 0,938^2 = 0,880$.

Interpretare

Această valoare arată că 88% din variaţia variabilei Y este explicată prin variaţia variabilei X.

c. *Testarea semnificaţiei raportului de corelaţie*

Formularea ipotezelor

H_0: $\eta = 0$ (nu există o legătură statistică între cele două variabile).

H_1: $\eta > 0$ (există o legătură statistică între cele două variabile).

Valoarea teoretică a statisticii F

Pentru un risc $\alpha = 0,05$ şi $k-1=3-1=2$, $n-k=10-3=7$ grade de libertate (k este numărul de parametri estimaţi, n numărul de observaţii), se citeşte din tabelul Fisher valoarea teoretică:

$F_{\alpha,k-1,n-k} = F_{0,05;2;7} = 4,737$.

Calculul statisticii test

Valoarea calculată a statisticii F este:

$$F_{calc} = \frac{S_E^2}{S_R^2} = \frac{\frac{ESS}{k-1}}{\frac{RSS}{n-k}} = \frac{\frac{1122,846}{2}}{\frac{153,654}{7}} = \frac{561,423}{21,951} = 25,58.$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Stabilirea regulii de decizie

- dacă $F_{calc} \leq F_{\alpha,v_1,v_2}$ sau $SigF \geq \alpha$, se acceptă ipoteza H_0.
- dacă $F_{calc} > F_{\alpha,v_1,v_2}$ sau $SigF < \alpha$, se respinge ipoteza H_0, cu o probabilitate de 0,95.

Interpretarea rezultatului

$F_{calc} = 25,58 > F_{0,05,2,7} = 4,737$. Acest rezultat conduce la ipoteza că se respinge ipoteza H_0. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că valoarea raportului de corelație este semnificativ diferită de zero.

Decizia corectă se poate lua și prin compararea valorii probabilității asociate statisticii test calculate (*Sig*) cu nivelul pragului de semnificație ales ($\alpha=0,05$).

Din rezultatele obținute, $SigF=0.001<0,05$, ceea ce arată că se respinge ipoteza H_0 cu un risc de 5%.

3.2.2. Teste grilă

1. Forma generală a unui model polinomial de ordin p este:

a) $Y = \beta_0 \cdot \beta_1^X \cdot \varepsilon$

b) $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot \frac{1}{X^p} + \varepsilon$

c) $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X^2 + ... + \beta_p \cdot X^p + \varepsilon$

2. Forma generală a unui model parabolic este:

a) $Y = \beta_0 \cdot \beta_1^X \cdot \varepsilon$

b) $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X^2 + \varepsilon$

c) $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X^2 + \beta_3 \cdot X^3 + \varepsilon$

3. Forma generală a unui model cubic este:

a) $Y = \beta_0 \cdot \beta_1^X \cdot \varepsilon$

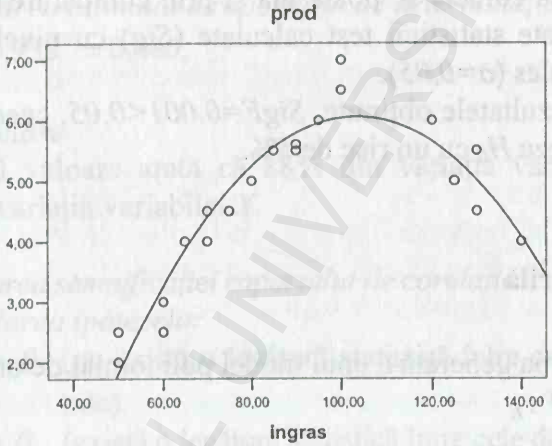
b) $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X^2 + \varepsilon$

c) $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X^2 + \beta_3 \cdot X^3 + \varepsilon$

BCU MIRCEA CEL BĂTRÂN UNIVERSITY LIBRARY

4. Între variabilele *Cost unitar de producţie* şi *Volumul producţiei,* există o legătură explicată de un model:
a) liniar simplu
b) polinomial de gradul doi
c) exponenţial

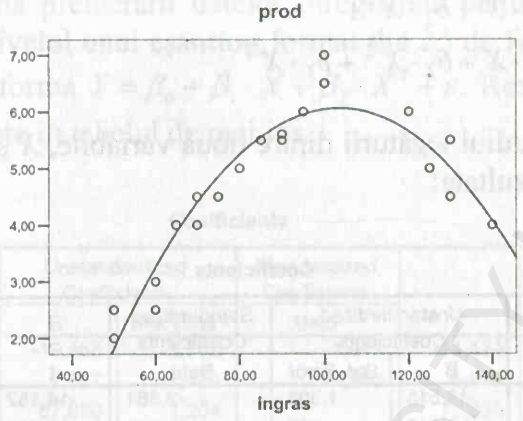
5. În studiul legăturii dintre *Producţia agricolă* (tone la ha) şi *Cantitatea de îngrăşăminte* (kg), s-a obţinut reprezentarea grafică de mai jos.



Ecuaţia modelului de regresie care arată legătura dintre cele două variabile este:
a) $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon_i$
b) $y_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2 + \varepsilon_i$
c) $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 + \varepsilon_i$

6. În studiul legăturii dintre *Producţia agricolă* (tone la ha) şi *Cantitatea de îngrăşăminte* (kg), înregistrate în judeţele din România în anul 2008, s-a obţinut reprezentarea grafică de mai jos.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



Nivelul maxim estimat al producției este atins pentru o valoare a cantității de îngrășăminte dată de relația:

a) $-\frac{b_1}{2b_2}$

b) $-\frac{b_2}{2b_1}$

c) $-\frac{\beta_1}{2\beta_2}$

7. În economie, un model polinomial este folosit în studiul legăturii dintre

a) rata inflației și rata șomajului

b) valoarea consumului și nivelul prețurilor

c) costul unui proces de producție și cantitatea producției obținute

8. În studiul legăturii dintre două variabile, X și Y, s-au obținut următoarele rezultate:

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
var_X	-18,515	1,308	-2,361	-14,152	,000
var_X ** 2	1,210	,133	1,517	9,096	,000
(Constant)	89,856	2,317		38,783	,000

Forma generală a modelului estimat este:

a) $Y_X = b_0 \cdot b_1^X$

BCU "Ion Creangă" UNIVERSITY LIBRARY

b) $Y_X = b_0 + b_1 \cdot X + b_2 \cdot X^2$

c) $Y_X = b_0 + b_1 \cdot X + b_2 \cdot X^2 + b_3 \cdot X^3$

9. În studiul legăturii dintre două variabile, X şi Y, s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
var_X	-18,515	1,308	-2,361	-14,152	,000
var_X ** 2	1,210	,133	1,517	9,096	,000
(Constant)	89,856	2,317		38,783	,000

Modelul de regresie estimat este:

a) $Y_X = -18,515 + 1,210 \cdot X + 89,856 \cdot X^2$

b) $Y_X = 89,856 - 18,515 \cdot X + 1,210 \cdot X^2$

c) $Y_X = 89,856 + 1,210 \cdot X_1 - 18,515 \cdot X_2$

10. În urma prelucrării datelor privind *Costul unitar al produselor realizate* şi *Producţia obţinută*, pentru datele înregistrate pentru un eşantion format din 50 de firme, s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
var_X	-5,441	,991	-2,981	-5,493	,000
var_X ** 2	,155	,027	3,120	5,749	,000
(Constant)	67,359	4,562		14,764	,000

Se poate considera că:

a) parametrii modelului de regresie sunt semnificativ diferiţi de zero, cu o probabilitate de 0,95

b) parametrii modelului de regresie nu sunt semnificativ diferiţi de zero, cu o probabilitate de 0,95

c) parametrii modelului de regresie sunt semnificativ diferiţi de zero, cu un risc de 0,95

BCU CLUJ-NAPOCA BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITY LIBRARY

11. În urma prelucrării datelor înregistrate pentru două variabile, X şi Y, la nivelul unui eşantion format din 25 de firme, s-a estimat un model de forma $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X^2 + \varepsilon$. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
Variabila_X	-19,458	1,702	-1,912	-11,430	,000
Variabila_X ** 2	2,827	,496	,953	5,696	,000
(Constant)	87,690	1,204		72,835	,000

Limitele intervalului de încredere pentru parametrul β_2, considerând un risc $\alpha=0,05$, sunt:

a) [85,323; 89,798]

b) [-22,988; - 15,928]

c) [1,798; 3,856]

12. În urma prelucrării datelor înregistrate pentru două variabile, X şi Y, la nivelul unui eşantion format din 25 de firme, s-a estimat un model de forma $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X^2 + \beta_3 \cdot X^3 + \varepsilon$. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
X	-66,909	18,358	-12,833	-3,645	,011
X ** 2	8,033	2,982	20,150	2,694	,036
X ** 3	-,298	,153	-7,932	-1,950	,099
(Constant)	190,556	35,317		5,396	,002

În urma analizei rezultatelor obținute privind valorile estimate ale parametrilor modelului şi testarea semnificației acestora, se poate considera că modelul de regresie al legăturii dintre cele două variabile este un model de regresie:

a) liniar

b) parabolic

c) cubic

BCU TRANSILVANIA UNIVERSITY LIBRARY

Rezultate pentru testele grilă

Număr test	Răspunsuri corecte
1	c
2	b
3	c
4	b
5	a
6	a
7	c
8	b
9	b
10	a
11	c
12	b

BCU IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul 4

MODELE DE REGRESIE CU VARIABILE ALTERNATIVE

1.	Modele de regresie ANOVA
	Probleme rezolvate
	Teste grilă
2.	Modele de regresie ANCOVA
	Probleme rezolvate
	Teste grilă

În acest capitol, sunt prezentate probleme rezolvate şi teste grilă care privesc modelarea fenomenelor economice cu ajutorul modelelor de regresie cu variabile alternative (dummy) şi variabile numerice independente, respectiv modele de regresie de tip ANOVA şi ANCOVA.

BCU Cluj / UNIVERSITY LIBRARY

4.1. Modele de regresie ANOVA

Modelele de regresie cu variabile alternative independente de tip ANOVA sunt acele modele în care variabilele independente sunt doar variabile alternative, numite şi *variabile dummy*. Aceste variabile admit doar două valori, de regulă, zero şi unu.

Forma generală a modelelor ANOVA, în cazul unei variabile dummy, este:

$Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \varepsilon$, unde:

- Y este variabila dependentă;
- D este variabila alternativă sau dummy care ia următoarele valori: $D=1$, dacă îndeplineşte o anumită condiţie pentru unităţile populaţiei şi $D=0$, dacă nu este îndeplinită condiţia cerută;
- α_0 reprezintă valoarea medie a variabilei dependente pentru acea categorie de unităţi din populaţie care nu îndeplinesc condiţia prin care se defineşte variabila dummy, respectiv pentru $D=0$;
- $\alpha_0 + \alpha_1$ reprezintă valoarea medie a variabilei dependente pentru acea categorie de unităţi din populaţie care îndeplinesc condiţia prin care se defineşte variabila dummy, respectiv pentru $D=1$;
- α_1 reprezintă diferenţa dintre mediile celor două categorii de unităţi delimitate de variabila alternativă;
- ε este variabila eroare.

În cazul unei populaţii structurate în p grupe, se pot defini $(p-1)$ variabile dummy pentru a evidenţia diferenţele între aceste grupe. De exemplu, în cazul unei populaţii împărţite în trei grupe, se pot defini două variabile dummy.

Forma generală a modelelor ANOVA, în cazul a două variabile dummy, este:

$Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D_1 + \alpha_2 \cdot D_2 + \varepsilon$, unde:

- Y este variabila dependentă;
- D_1 este variabila alternativă sau dummy care ia următoarele valori: $D_1=1$, dacă unităţile populaţiei aparţin primei grupe în care este împărţită populaţia şi $D_1=0$, dacă aparţin celorlalte grupe;

BCU IAŞI - CENTRU UNIVERSITAR

- D_2 este variabila alternativă sau dummy care ia următoarele valori: $D_2=1$, dacă unitățile populației aparțin celei de-a doua grupe a populației și $D_2=0$, dacă aparțin celorlalte grupe.

Astfel, unitățile populației din cea de-a treia grupă vor avea definite valorile $D_1=0$ și $D_2=0$, pentru ambele variabile dummy.

În mod sintetic, definirea acestor variabile poate fi prezentată astfel:

Grupa unităților populației	D_1	D_2
Grupa 1	1	0
Grupa 2	0	1
Grupa 3	0	0

α_0 reprezintă valoarea medie a variabilei dependente pentru unitățile din grupa a treia a populației.

$\alpha_0 + \alpha_1$ reprezintă valoarea medie a variabilei dependente pentru unitățile din prima grupă a populației.

$\alpha_0 + \alpha_2$ reprezintă valoarea medie a variabilei dependente pentru unitățile din grupa a doua a populației.

α_1 reprezintă diferența dintre valoarea medie a variabilei dependente pentru unitățile din prima grupă a populației și valoarea medie a variabilei dependente pentru unitățile din grupa a treia a populației.

α_2 reprezintă diferența dintre valoarea medie a variabilei dependente pentru unitățile din grupa a doua a populației și valoarea medie a variabilei dependente pentru unitățile din grupa a treia a populației.

ε este variabila eroare.

4.1.1. Probleme rezolvate

Problema 1

În vederea evaluării diferențelor privind valoarea *PIB pe locuitor (Euro),* înregistrată în anul 2007, între țările Uniunii Europene, se definește variabila dummy, *D*, cu următoarele valori:

- $D=1$, pentru cele 15 țări ale UE (*EU_15*) existente înaintea ultimelor două extinderi ale uniunii, din 2004 și 2007, respectiv pentru

Austria, Belgia, Danemarca, Finlanda, Franţa, Germania, Grecia, Italia, Irlanda, Luxemburg, Marea Britanie, Olanda, Portugalia, Spania şi Suedia;

- *D=0,* pentru cele 12 ţări ale UE (*EU_12*) care au aderat la uniune în 2004 şi 2007, respectiv Republica Cehă, Cipru, Estonia, Letonia, Lituania, Malta, Polonia, Slovacia, Slovenia, Ungaria, Bulgaria şi România.

Rezultatele modelării legăturii dintre variabilele *PIB pe locuitor* (*Y, euro*) înregistrat, în anul 2007, în ţările Uniunii Europene şi *variabila dummy* definită anterior, se prezintă în tabelul de mai jos.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	9466,667	2930,356		3,231	,003
	EU_15_EU_12	22660,000	3931,485	,755	5,764	,000

a. Dependent Variable: PIB_loc

Sursa: *Prelucrat după Eurostat Yearbook 2008*

Se cere:

a. să se scrie ecuaţia modelului estimat;
b. să se interpreteze estimaţiile parametrilor modelului.

Rezolvare

a. Ecuaţia modelului estimat al legăturii dintre variabilele *PIB pe locuitor* (*euro*) şi *variabila dummy* este de forma:

$Y = a_0 + a_1 \cdot D$, unde:

- a_0 este estimaţia punctuală a parametrului α_0;
- a_1 este estimaţia punctuală a parametrului α_1.

Ecuaţia modelului estimat al legăturii dintre cele două variabile este:

$$Y = 9466,667 + 22660 \cdot D.$$

b. Interpretare estimaţii

Valoarea a_0 = *9466,667 Euro* este valoarea medie estimată a *PIB pe locuitor* pentru cele 12 ţări ale Uniunii Europene care au aderat în anii 2004 şi 2007 (*D=0).*

Valoarea a_0+a_1= *32126,667 Euro* este valoarea medie estimată a *PIB pe locuitor* pentru cele 15 ţări ale Uniunii Europene existente

înaintea extinderii Uniunii spre țările din Europa Centrală și de Est (*D=1*).

Estimația $a_1 = 22660$ *Euro* este *diferența* dintre valoarea medie estimată a *PIB pe locuitor* în cele 15 țări ale Uniunii Europene înainte de extindere și valoarea medie estimată a *PIB pe locuitor* înregistrată în cele 12 țări ale Uniunii Europene care au aderat în anii 2004 și 2007. Astfel, țările *EU_15* au, în medie, un *PIB pe locuitor* mai mare cu *22660 Euro* (pentru că $a_1>0$) decât țările *EU_12*.

Problema 2

Rezultatele modelării legăturii dintre variabilele *Numărul de șomeri înregistrați* (*Y, persoane*) și *Sexul persoanei* (*D=1* pentru *masculin* și *D=0* pentru *feminin*), pentru un eșantion de 50 de țări ale lumii, se prezintă în tabelul de mai jos.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
		B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1	(Constant)	3354,435	1013,284		3,310	,002
	sexul	1840,010	1378,905	,189	1,334	,188

a. Dependent Variable: someri

Sursa: *Prelucrat după Eurostat Yearbook 2008*

Se cere să se testeze dacă există diferențe semnificative între numărul mediu de șomeri pe sexe, înregistrați la nivelul populației. Se consideră un risc $\alpha = 5\%$.

Rezolvare

Diferența dintre numărul mediu de șomeri de sex masculin și numărul mediu de șomeri de sex feminin este reprezentată de α_1 din ecuația modelului ANOVA:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \varepsilon .$$

A testa existența diferențelor pe sexe este echivalent cu a testa semnificația parametrului α_1 din modelul ANOVA de mai sus.

BCU "CAROL I" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Formularea ipotezelor

H_0: $\alpha_1 = 0$ (nu există diferenţe semnificative între numărul mediu de şomeri pe sexe la nivelul populaţiei).

H_1: $\alpha_1 \neq 0$ (există diferenţe semnificative între numărul mediu de şomeri pe sexe la nivelul populaţiei).

Alegerea pragului de semnificaţie a testului

$\alpha = 0,05$.

Alegerea statisticii test

Se alege statistica *Student*: $t = \frac{\hat{\alpha}_1 - \alpha_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_1}}$.

Valoarea teoretică a statisticii test

$t_{\alpha/2;n-k}$ se citeşte din tabelul *Student*. Pentru exemplul dat, considerând un risc $\alpha = 0,05$, $k=2$ (k este numărul de parametri din model), se citeşte valoarea $t_{\alpha/2,n-2}=t_{0,025;50-2}=1,96$.

Calculul statisticii test

Pentru exemplul considerat, statistica test *Student* se calculează astfel:

$$t_{calc} = \frac{a_1}{s_{\hat{\alpha}_1}} = \frac{1840,01}{1378,905} = 1,334 .$$

Stabilirea regulii de decizie

- Dacă $|t_{calc}| \leq t_{\alpha/2;n-k}$, se acceptă ipoteza H_0.
- Dacă $|t_{calc}| > t_{\alpha/2;n-k}$, se respinge ipoteza H_0, cu o probabilitate de $(1-\alpha)$.

Interpretarea rezultatelor

$|t_{calc}| = 1,334 < t_{0,025;48} = 1,96$. Acest rezultat permite luarea deciziei de a accepta ipoteza H_0, adică parametrul α_1 nu este semnificativ diferit de zero sau se poate afirma că nu există diferenţe semnificative între nivelurile medii ale numărului de şomeri înregistraţi pe sexe la nivelul populaţiei.

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Problema 3

Rezultatele modelării legăturii dintre variabilele *Numărul de şomeri înregistraţi* (*Y, persoane*) şi *Nivelul de instruire* în România, la 31 decembrie 2006, se prezintă în tabelul de mai jos.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	933,333	1021,832		,913	,368
	D1	7916,250	1445,089	,794	5,478	,000
	D2	3186,500	1445,089	,320	2,205	,035

a. Dependent Variable: someri

Sursa: *Anuarul Statistic al României 2007, INS, Bucureşti, www.insee.ro*

Populaţia considerată este împărţită în trei grupe după nivelul de instruire. Prin urmare, s-au definit două variabile dummy, D_1 şi D_2, care iau următoarele valori:

Grupa unităţilor populaţiei după nivelul de instruire	D_1	D_2
Grupa 1 – primar, gimnazial, profesional	1	0
Grupa 2 – liceal şi postliceal	0	1
Grupa 3 – universitar	0	0

Se cere:

a. să se scrie ecuaţia modelului estimat;
b. să se interpreteze estimaţiile parametrilor modelului.

Rezolvare

a. Ecuaţia modelului estimat al legăturii dintre variabilele considerate este de forma:

$Y = a_0 + a_1 \cdot D_1 + a_2 \cdot D_2$, unde:

- a_0 este estimaţia punctuală a parametrului α_0;
- a_1 este estimaţia punctuală a parametrului α_1;
- a_2 este estimaţia punctuală a parametrului α_2.

BCU "CAROL I" UNIVERSITY LIBRARY

Pe baza rezultatelor de mai sus, *ecuaţia modelului estimat* al legăturii dintre cele două variabile este:

$$Y = 933,333 + 7916,25 \cdot D_1 + 3186,5 \cdot D_2 .$$

b. Interpretare estimaţii

Valoarea a_0 = *933,333 persoane* este nivelul mediu estimat al *Numărului de şomeri* cu studii universitare, înregistraţi în România în anul 2006 (D_1=*0*, D_2=*0*).

Valoarea a_0+a_1 = *8849,583 persoane* este valoarea medie estimată a *Numărului de şomeri* cu studii primare, gimnaziale şi profesionale înregistraţi în România în anul 2006 (D_1=*1*, D_2=*0*).

Estimaţia a_1 = *7916,25 persoane* este *diferenţa* dintre numărul mediu estimat al şomerilor cu studii primare, gimnaziale, profesionale, şi al celor cu studii universitare. O valoare pozitivă a acestei estimaţii evidenţiază faptul că numărul mediu de şomeri este mai mare, în cazul persoanelor cu studii primare, gimnaziale şi profesionale, faţă de persoanele care au studii universitare.

Valoarea a_0+a_2 = *4119,833 persoane* este valoarea medie estimată a *Numărului de şomeri* cu studii liceale şi postliceale înregistraţi în România în anul 2006 (D_1=*0*, D_2=*1*).

Estimaţia a_2 = *3186,5 persoane* este *diferenţa* dintre numărul mediu estimat al şomerilor cu studii liceale sau postliceale şi al şomerilor cu studii universitare. O valoare pozitivă a acestei estimaţii evidenţiază faptul că numărul mediu de şomeri este mai mare, în cazul persoanelor cu studii liceale şi postliceale, faţă de persoanele care au studii universitare.

4.1.2. Teste grilă

1. Variabila dummy este o variabilă care admite
a) două valori: zero şi unu
b) trei valori
c) o infinitate de valori

2. Modelele de regresie care au ca variabile independente doar variabile alternative (dummy) sunt modele de tip:
a) ANOVA
b) ANCOVA
c) MANOVA

BCU IAŞI CENTRUL DE VECHIME LIBRARY

3. Forma generală a modelului de regresie de tip cu o variabilă dummy este:

a) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \varepsilon$

b) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \beta \cdot X + \varepsilon$

c) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D_1 + \alpha_2 \cdot D_2 + \beta \cdot X + \varepsilon$

d) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D_1 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \varepsilon$

4. Forma generală a modelului de regresie de tip ANOVA cu două variabile dummy este:

a) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \beta \cdot X + \varepsilon$

b) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D_1 + \alpha_2 \cdot D_2 + \varepsilon$

c) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D_1 + \alpha_2 \cdot D_2 + \beta \cdot X + \varepsilon$

d) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D_1 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \varepsilon$

5. În modelul de regresie de tip ANOVA de forma: $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \varepsilon$, parametrul α_0 reprezintă:

a) valoarea medie a variabilei dependente pentru acea categorie de unități din populație care nu îndeplinesc condiția prin care se definește variabila dummy, respectiv pentru *D=0*

b) valoarea medie a variabilei dependente pentru acea categorie de unități din populație care îndeplinesc condiția prin care se definește variabila dummy, respectiv pentru *D=1*

c) diferența dintre mediile celor două categorii de unități delimitate de variabila alternativă

6. În modelul de regresie de tip ANOVA de forma: $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \varepsilon$, parametrul α_1 reprezintă:

a) valoarea medie a variabilei dependente pentru acea categorie de unități din populație care nu îndeplinesc condiția prin care se definește variabila dummy, respectiv pentru *D=0*

b) valoarea medie a variabilei dependente pentru acea categorie de unități din populație care îndeplinesc condiția prin care se definește variabila dummy, respectiv pentru *D=1*

c) diferența dintre mediile celor două categorii de unități delimitate de variabila alternativă

BCU STUDENT UNIVERSITY LIBRARY

7. În modelul de regresie de tip ANOVA de forma: $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \varepsilon$, parametrul $(\alpha_0 + \alpha_1)$ reprezintă:

a) valoarea medie a variabilei dependente pentru acea categorie de unităţi din populaţie care nu îndeplinesc condiţia prin care se defineşte variabila dummy, respectiv pentru $D=0$

b) valoarea medie a variabilei dependente pentru acea categorie de unităţi din populaţie care îndeplinesc condiţia prin care se defineşte variabila dummy, respectiv pentru $D=1$

c) diferenţa dintre mediile celor două categorii de unităţi delimitate de variabila alternativă

8. Pentru o populaţie împărţită în trei grupe, se definesc două variabile dummy, după cum urmează: D_1, cu $D_1=1$, dacă unităţile populaţiei aparţin primei grupe şi $D_1=0$, dacă aparţin celorlalte grupe; D_2, cu $D_2=1$, dacă unităţile populaţiei aparţin celei de-a doua grupe a populaţiei şi $D_2=0$, dacă aparţin celorlalte grupe. În modelul de regresie de tip ANOVA de forma: $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D_1 + \alpha_2 \cdot D_2 + \varepsilon$, parametrul α_0 reprezintă:

a) valoarea medie a variabilei dependente pentru unităţile din prima grupă a populaţiei

b) valoarea medie a variabilei dependente pentru unităţile din grupa a doua a populaţiei

c) valoarea medie a variabilei dependente pentru unităţile din grupa a treia a populaţiei

9. Pentru o populaţie împărţită în trei grupe, se definesc două variabile dummy, după cum urmează: D_1, cu $D_1=1$, dacă unităţile populaţiei aparţin primei grupe şi $D_1=0$, dacă aparţin celorlalte grupe; D_2, cu $D_2=1$, dacă unităţile populaţiei aparţin celei de-a doua grupe a populaţiei şi $D_2=0$, dacă aparţin celorlalte grupe. În modelul de regresie de tip ANOVA de forma: $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D_1 + \alpha_2 \cdot D_2 + \varepsilon$, valoarea $(\alpha_0 + \alpha_1)$ reprezintă:

a) valoarea medie a variabilei dependente pentru unităţile din prima grupă a populaţiei

b) valoarea medie a variabilei dependente pentru unităţile din grupa a doua a populaţiei

c) valoarea medie a variabilei dependente pentru unităţile din grupa a treia a populaţiei

10. Pentru o populație împărțită în trei grupe, se definesc două variabile dummy, după cum urmează: D_1, cu $D_1=1$, dacă unitățile populației aparțin primei grupe și $D_1=0$, dacă aparțin celorlalte grupe; D_2, cu $D_2=1$, dacă unitățile populației aparțin celei de-a doua grupe a populației și $D_2=0$, dacă aparțin celorlalte grupe. În modelul de regresie de tip ANOVA de forma: $Y=\alpha_0+\alpha_1\cdot D_1+\alpha_2\cdot D_2+\varepsilon$, parametrul $(\alpha_0+\alpha_2)$ reprezintă:

a) valoarea medie a variabilei dependente pentru unitățile din prima grupă a populației
b) valoarea medie a variabilei dependente pentru unitățile din grupa a doua a populației
c) valoarea medie a variabilei dependente pentru unitățile din grupa a treia a populației

11. În studiul legăturii dintre *Câștigul salarial nominal net* (*Y, mii lei*) și *Sexul persoanei* (*D*, unde *D=1* pentru *sexul masculin și D=0* pentru *sexul feminin*), pentru datele înregistrate în firmele dintr-o țară din Uniunea Europeană, s-au obținut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	10,100	1,373		7,356	,000
	sexul_1_m_0_f	12,500	1,942	,835	6,438	,000

a. Dependent Variable: salariu

Pentru exemplul considerat, modelul estimat al legăturii dintre cele două variabile este de forma:

a) $Y=12,5+10,1\cdot D$
b) $Y=10,1+12,5\cdot D$
c) $Y=1,373+1,942\cdot D$

12. În studiul legăturii dintre *Câștigul salarial nominal net* (*Y, mii lei*) și *Sexul persoanei* (*D*, unde *D=1*, pentru *sexul masculin și D=0*, pentru *sexul feminin*), pentru datele înregistrate în firmele dintr-o țară din Uniunea Europeană, s-au obținut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	10,100	1,373		7,356	,000
	sexul_1_m_0_f	12,500	1,942	,835	6,438	,000

a. Dependent Variable: salariu

Valorile estimate ale parametrilor modelului de regresie de tip ANOVA arată că:
a) nivelul mediu al câştigului salarial nominal net pentru persoanele de sex feminin este de 10,1 mii lei
b) nivelul mediu al câştigului salarial nominal net pentru persoanele de sex masculin este de 12,5 mii lei
c) diferența dintre nivelul mediu al câştigului salarial nominal net pentru persoanele de sex masculin şi cel feminin este de 12,5 mii lei

13. În studiul legăturii dintre *Câştigul salarial nominal net* (*Y, mii lei*) şi *Sexul persoanei* (*D*, unde *D=1,* pentru *sexul masculin şi D=0,* pentru *sexul feminin*), pentru datele înregistrate în firmele dintr-o țară din Uniunea Europeană, s-au obținut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	4169,333	1133,610		3,678	,001
	sexul	929,833	1603,167	,099	,580	,566

a. Dependent Variable: salariu

Pentru exemplul dat, considerând un risc $\alpha=0,05$, se poate afirma că:
a) există diferențe semnificative între nivelurile medii ale câştigului salarial nominal net pe sexe, asumându-ne un risc de *0,05*
b) nu există diferențe semnificative între nivelurile medii ale câştigului salarial nominal net pe sexe, asumându-ne un risc de *0,05*
c) nu există diferențe semnificative între nivelurile medii ale câştigului salarial nominal net pe sexe, asumându-ne un risc de *0,566*

14. Pentru țările din Uniunea Europeană, se înregistrează numărul de şomeri pe niveluri de instruire *(1 – primar şi gimnazial,*

2 – liceal, 3 – universitar). În acest caz, folosind ca variabilă de structurare a populației nivelul de instruire, în modelele de regresie cu variabile alternative de tip ANOVA care evaluează diferențele dintre cele 3 grupe, se vor defini:
a) două variabile dummy
b) trei variabile dummy
c) patru variabile dummy

15. În studiul legăturii dintre *Câștigul salarial nominal net* (*Y, mii lei*) și *Nivelul de instruire*, pentru datele înregistrate în țări ale Uniunii Europene, s-au obținut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	15,127	,859		17,603	,000
	D1	-8,778	,989	-1,005	-8,876	,000
	D2	-4,587	1,130	-,460	-4,059	,000

a. Dependent Variable: salariu

Populația considerată este împărțită în trei grupe după nivelul de instruire. Prin urmare, s-au definit două variabile dummy, D_1 și D_2, care iau următoarele valori:

Grupa unităților populației după nivelul de instruire	D_1	D_2
Grupa 1 – primar, gimnazial, profesional	1	0
Grupa 2 – liceal și postliceal	0	1
Grupa 3 – universitar	0	0

Pentru exemplul considerat, modelul de regresie estimat al legăturii dintre variabile, folosind ca variabilă de structurare nivelul de instruire, este de forma:

a) $Y = 15,127 + 8,778 \cdot D_1 + 4,587 \cdot D_2$

b) $Y = 15,127 - 8,778 \cdot D_1 - 4,587 \cdot D_2$

c) $Y = 0,859 + 0,989 \cdot D_1 + 1,13 \cdot D_2$

16. În studiul legăturii dintre *Câştigul salarial nominal net* (*Y, mii lei*) şi *Nivelul de instruire*, pentru datele înregistrate în ţări ale Uniunii Europene, s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	15,127	,859		17,603	,000
	D1	-8,778	,989	-1,005	-8,876	,000
	D2	-4,587	1,130	-,460	-4,059	,000

a. Dependent Variable: salariu

Populaţia considerată este împărţită în trei grupe, după nivelul de instruire. Prin urmare, s-au definit două variabile dummy, D_1 şi D_2, care iau următoarele valori:

Grupa unităţilor populaţiei după nivelul de instruire	D_1	D_2
Grupa 1 – primar, gimnazial, profesional	1	0
Grupa 2 – liceal şi postliceal	0	1
Grupa 3 – universitar	0	0

Valorile estimate ale parametrilor modelului de tip ANOVA arată că:

a) nivelul mediu al câştigului salarial nominal net pentru persoanele cu studii primare, gimnaziale şi profesionale este de 15,127 mii lei

b) nivelul mediu al câştigului salarial nominal net pentru persoanele cu studii universitare este de 15,127 mii lei

c) persoanele cu studii primare, gimnaziale şi profesionale au un nivel mediu al câştigului salarial nominal net mai mic, în medie, cu 8,778 mii lei faţă de persoanele cu studii universitare

d) persoanele cu studii universitare au un nivel mediu al câştigului salarial nominal net mai mare, în medie, cu 4,587 mii lei faţă de persoanele cu studii liceale şi postliceale

17. În studiul legăturii dintre *Câştigul salarial nominal net* (*Y, mii lei*) şi *Nivelul de instruire*, pentru datele înregistrate în ţări ale Uniunii Europene, s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	15,127	,859		17,603	,000
	D1	-8,778	,989	-1,005	-8,876	,000
	D2	-4,587	1,130	-,460	-4,059	,000

a. Dependent Variable: salariu

Populația considerată este împărțită în trei grupe după nivelul de instruire. Prin urmare, s-au definit două variabile dummy, D_1 *și* D_2, care iau următoarele valori:

Grupa unităților populației după nivelul de instruire	D_1	D_2
Grupa 1 – primar, gimnazial, profesional	1	0
Grupa 2 – liceal și postliceal	0	1
Grupa 3 – universitar	0	0

Pentru exemplul dat, considerând un risc $\alpha=0,05$, se poate afirma că:

a) există diferențe semnificative între nivelurile medii ale câștigului salarial nominal net pe niveluri de instruire la nivelul populației, asumându-ne un risc de *0,95*

b) nu există diferențe semnificative între nivelurile medii ale câștigului salarial nominal net pe niveluri de instruire la nivelul populației, asumându-ne un risc de *0,05*

c) există diferențe semnificative între nivelurile medii ale câștigului salarial nominal net pe niveluri de instruire la nivelul populației, asumându-ne un risc de *0,05*

18. Variabilele alternative pot fi întâlnite și sub denumirea de *variabile*:

a) dummy

b) binare

c) triple

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezultate pentru testele grilă

Număr test	Răspunsuri corecte
1	a
2	a
3	a
4	b
5	a
6	c
7	b
8	c
9	a
10	b
11	b
12	a, c
13	b
14	a
15	b
16	b, c, d
17	c
18	a, b

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

4.2. Modele de regresie ANCOVA

Modelele de regresie de tip ANCOVA sunt acele modele în care variabilele independente sunt atât variabile alternative (dummy), cât şi variabile numerice.

Câteva exemple de astfel de modele sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Tabelul 4.1. *Forma generală a unor modele de regresie de tip ANCOVA*

Tipul modelului	Forma generală a modelului
Model cu o variabilă alternativă (D) şi o variabilă cantitativă (X)	$Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \beta \cdot X + \varepsilon$
Model cu două variabile alternative (D_1, D_2) şi o variabilă cantitativă (X)	$Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D_1 + \alpha_2 \cdot D_2 + \beta \cdot X + \varepsilon$
Model cu o variabilă alternativă (D) şi două variabile cantitative (X_1, X_2)	$Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \varepsilon$

4.2.1. Probleme rezolvate

Problema 1

Rezultatele modelării legăturii dintre variabilele *Durata medie a vieţii (Y, ani), Sexul persoanei (D, unde D=1,* pentru *sexul masculin şi D=0,* pentru *sexul feminin)* şi valoarea *Salariului minim pe economie* (*X, euro/lună*), înregistrate în diferite ţări ale Uniunii Europene în anul 2007, se prezintă în tabelul de mai jos.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
		B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1	(Constant)	76,662	,749		102,309	,000
	Sexul_pers	-6,800	,785	-,711	-8,666	,000
	Salariu_minim	,005	,001	,495	6,034	,000

a. Dependent Variable: Sper_viata

Sursa: *Prelucrat pe baza datelor din Eurostat Yearbook 2008*

BCU "MIHAI EMINESCU" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Se cere:

a. să se scrie ecuaţia modelului estimat;
b. să se interpreteze estimaţiile parametrilor modelului.

Rezolvare

a. Ecuaţia modelului estimat al legăturii dintre variabilele analizate este de forma:

$Y = a_0 + a_1 \cdot D + b \cdot X$, unde:

a_0 este estimaţia punctuală a parametrului α_0;

a_1 este estimaţia punctuală a parametrului α_1;

b este estimaţia punctuală a parametrului β.

Ecuaţia modelului estimat al legăturii dintre variabile este:

$Y = 76,662 - 6,8 \cdot D + 0,005 \cdot X$.

b. Interpretare estimaţii

Valoarea $a_0 = 76,662 \sim 77$ *ani* este valoarea medie estimată a *Duratei medii a vieţii* pentru persoanele de sex feminin ($D=0$), atunci când nivelul *Salariului minim* este nul ($X=0$).

Valoarea $a_0+a_1 = 69,862 \sim 70$ *ani* este valoarea medie estimată a *Duratei medii a vieţii* pentru persoanele de sex masculin ($D=1$), atunci când nivelul *Salariului minim* este nul ($X=0$).

Estimaţia $a_1 = -6,8 \sim 7$ *ani* este *diferenţa* dintre valoarea medie estimată a *Duratei medii a vieţii* pentru persoanele de sex masculin şi cele de sex feminin. Valoarea negativă arată că persoanele de sex masculin au o durată medie de viaţă estimată mai mică cu 6,8~7 ani faţă de persoanele de sex feminin.

Valoarea $b = 0,005$ *ani* arată că *Durata medie a vieţii* creşte, în medie, pentru ambele sexe, cu 0,005 ani, la o creştere cu un euro a *Salariului minim pe economie*.

Problema 2

Rezultatele modelării legăturii dintre variabilele *Durata medie a vieţii (Y, ani), Sexul persoanei (D=1,* pentru *sexul masculin şi D=0,* pentru *sexul feminin)* şi *Salariul minim pe economie* (*X, euro/lună*), înregistrate în cele 27 de ţări ale Uniunii Europene, în anul 2007, se prezintă în tabelul de mai jos.

BCU "VICTOR BABEŞ" UNIVERSITY LIBRARY

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
		B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1	(Constant)	76,662	,749		102,309	,000
	Sexul_pers	-6,800	,785	-,711	-8,666	,000
	Salariu_minim	,005	,001	,495	6,034	,000

a. Dependent Variable: Sper_viata

Sursa: *Prelucrat pe baza datelor din Eurostat Yearbook 2008*

Se cere să se testeze dacă există diferențe semnificative între durata medie a vieții pe sexe la nivelul populației. Se consideră un risc $\alpha = 5\%$.

Rezolvare

Diferența estimată dintre durata medie de viață a persoanelor de sex masculin și durata medie de viață a persoanelor de sex feminin este reprezentată de α_1 din ecuația modelului ANCOVA următor:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \beta \cdot X + \varepsilon .$$

A testa existența diferențelor pe sexe este echivalent cu a testa semnificația parametrului α_1 din modelul ANCOVA.

Formularea ipotezelor

H_0: $\alpha_1 = 0$ (nu există diferențe semnificative între durata medie a vieții pe cele două sexe la nivelul populației).

H_1: $\alpha_1 \neq 0$ (există diferențe semnificative între durata medie a vieții pe cele două sexe la nivelul populației).

Alegerea pragului de semnificație a testului

$\alpha = 0,05$

Alegerea statisticii test

Se alege statistica *Student*: $t = \dfrac{\hat{\alpha}_1 - \alpha_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_1}}$.

Valoarea teoretică a statisticii test

$t_{\alpha/2;n-k}$ se citește din tabelul *Student*. Pentru exemplul dat, considerând un risc $\alpha = 0,05$ și $k=3$ (k este numărul de parametri), se citește valoarea $t_{\alpha/2,n-3} = t_{0,025;27-3} = 2,064$.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Calculul statisticii test

Pentru exemplul considerat, valoarea calculată a statisticii *Student* se obţine astfel:

$$t_{calc} = \frac{a_1}{s_{\hat{a}_1}} = \frac{-6,8}{0,785} = -8,66 .$$

Stabilirea regulii de decizie

- dacă $|t_{calc}| \leq t_{\alpha/2;n-3}$, se acceptă ipoteza H_0.
- dacă $|t_{calc}| > t_{\alpha/2;n-3}$, se respinge ipoteza H_0, cu o probabilitate de *0,95*.

Interpretarea rezultatelor

$|t_{calc}| = 8,66 > t_{0,025;24} = 2,064$. Acest rezultat permite luarea deciziei de a respinge ipoteza H_0 cu un risc de 0,05. Se poate garanta cu o probabilitate de 0,95 că parametrul α_1 este semnificativ diferit de zero, adică se poate afirma că există diferenţe semnificative între durata medie a vieţii pe sexe la nivelul populaţiei.

Problema 3

Rezultatele modelării legăturii dintre variabilele *Durata medie a vieţii (Y, ani), Sexul persoanei (D_1,* unde $D_1=1$, pentru persoanele de *sex masculin*, $D_1=0$, pentru persoanele de *sex feminin)* şi valoarea *PIB pe locuitor* (*X, euro*), înregistrate în diferite ţări din Europa şi Africa (D_2, unde $D_2=1$, pentru ţările din Europa, $D_2=0$, pentru ţările din Africa) în anul 2007, se prezintă în tabelul de mai jos.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	49,755	1,064		46,775	,000
	Sexul_pers	-6,399	,823	-,271	-7,773	,000
	D2	25,076	1,212	,810	20,688	,000
	PIB_locuitor	,0002	,0000	,240	6,128	,000

a. Dependent Variable: Sper_viata

Sursa: *Prelucrat pe baza datelor din Eurostat Yearbook 2008*

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Se cere:

a. să se scrie ecuația modelului estimat;
b. să se interpreteze estimațiile parametrilor modelului.

Rezolvare

a. Ecuația modelului estimat al legăturii dintre variabilele analizate este de forma:

$Y = a_0 + a_1 \cdot D_1 + a_2 \cdot D_2 + b \cdot X$, unde:

- a_0 este estimația punctuală a parametrului α_0;
- a_1 este estimația punctuală a parametrului α_1;
- b este estimația punctuală a parametrului β.

Ecuația modelului estimat al legăturii dintre variabile este:

$Y = 49{,}755 - 6{,}399 \cdot D_1 + 25{,}076 \cdot D_2 + 0{,}0002 \cdot X$.

b. Interpretare estimații

Valoarea a_0 = *49,755~50 ani* este valoarea medie estimată a *Duratei medii a vieții* pentru persoanele de sex feminin *(D_1=0)* din Africa *(D_2=0)*, atunci când valoarea *PIB pe locuitor* este nulă (*X=0*).

Valoarea a_0+a_1 = *43,356 ~43 ani* este valoarea medie estimată a *Duratei medii a vieții* pentru persoanele de sex masculin *(D_1=1)* din Africa *(D_2=0)*, atunci când nivelul *PIB pe locuitor* este nul.

Estimația a_1 = *-6,399~6 ani* este *diferența* dintre valoarea medie estimată a *Duratei medii a vieții* pentru persoanele de sex masculin și feminin. Valoarea negativă arată că persoanele de sex masculin au o durată medie de viață estimată mai mică cu 6,399~6 ani față de persoanele de sex feminin.

Valoarea a_0+a_2 = *74,831~75 ani* este valoarea medie estimată a *Duratei medii a vieții* pentru persoanele de sex feminin *(D_1=0)* din țările din Europa *(D_2=1)*, atunci când nivelul *PIB pe locuitor* este nul.

Estimația a_2 = *25,076 ani* este *diferența* dintre valoarea medie estimată a *Duratei medii a vieții* pentru persoanele din Europa și cele din Africa. Valoarea pozitivă arată că persoanele din Europa au o durată medie de viață estimată mai mare cu 25,076~25 ani față de persoanele din țările din Africa.

Valoarea $a_0+a_1+a_2$=*68,432~68 ani* este valoarea medie estimată a *Duratei medii a vieții* pentru persoanele de sex masculin *(D_1=1)* din țările din Europa *(D_2=1)*, atunci când nivelul *PIB pe locuitor* este nul.

BUCHAREST UNIVERSITY LIBRARY

Estimaţia *b= 0,0002 ani* arată că *Durata medie a vieţii* creşte, în medie, pentru ambele sexe şi pentru populaţia din ambele continente, cu 0,0002 ani, la o creştere cu un euro a nivelului *PIB pe locuitor*.

Problema 4

Rezultatele modelării legăturii dintre variabilele *Durata medie a vieţii (Y, ani), Sexul persoanei (D=1,* pentru *sexul masculin şi D=0,* pentru *sexul feminin),* valoarea *Salariului minim pe economie* (X_1, *Euro/lună*) şi *PIB pe locuitor* (X_2, *Euro*), înregistrate în diferite ţări ale Uniunii Europene în anul 2007, se prezintă în tabelul de mai jos.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	75,921	,621		122,255	,000
	Sexul_pers	-7,333	,678	-,734	-10,815	,000
	Salariu_minim	,007	,001	,852	5,350	,000
	PIB_locuitor	8,50E-005	,000	,312	1,958	,061

a. Dependent Variable: Sper_viata

Sursa: *Prelucrat pe baza datelor din Eurostat Yearbook 2008*

Se cere:

a. să se scrie ecuaţia modelului estimat;
b. să se interpreteze estimaţiile parametrilor modelului.

Rezolvare

a. Ecuaţia modelului estimat al legăturii dintre variabilele analizate este de forma:

$Y = a_0 + a_1 \cdot D + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2$, unde:

a_0 este estimaţia punctuală a parametrului α_0;

a_1 este estimaţia punctuală a parametrului α_1;

b_1 este estimaţia punctuală a parametrului β_1;

b_2 este estimaţia punctuală a parametrului β_2.

Ecuaţia modelului estimat al legăturii dintre variabile este:

$Y = 75,921 - 7,333 \cdot D + 0,007 \cdot X_1 + 0,000085 \cdot X_2$.

BCU ION CREANGĂ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b. Interpretare estimații

Valoarea a_0 = *75,921 ani* este valoarea medie estimată a *Duratei medii a vieții* pentru persoanele de sex feminin, atunci când nivelul *Salariului minim* și valoarea *PIB pe locuitor* sunt nule.

Estimația a_1 = *-7,333 ~ 7 ani* este *diferența* dintre valoarea medie estimată a *Duratei medii a vieții* pentru persoanele de sex masculin și feminin, atunci când nivelul *Salariului minim* și valoarea *PIB pe locuitor* sunt nule.

Valoarea b_1= *0,007 ani* arată că *Durata medie a vieții* crește, în medie, pentru ambele sexe, cu 0,007 ani, la o creștere cu un euro/lună a *Salariului minim pe economie,* considerând constantă influența *PIB pe locuitor.*

Valoarea b_2= *0,000085 ani* arată că *Durata medie a vieții* crește, în medie, pentru ambele sexe, cu *0,00008 ani*, la o creștere cu un euro a PIB pe locuitor, considerând constantă influența *Salariului minim pe economie.*

4.2.2. Teste grilă

1. Modelele de regresie care au ca variabile independente atât variabile alternative, cât și variabile numerice sunt modele de tip:
a) ANOVA
b) ANCOVA
c) MANOVA

2. Forma generală a modelului de regresie de tip ANCOVA, cu o variabilă alternativă și o variabilă cantitativă este:
a) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \varepsilon$
b) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \beta \cdot X + \varepsilon$
c) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D_1 + \alpha_2 \cdot D_2 + \beta \cdot X + \varepsilon$
d) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D_1 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \varepsilon$

3. Forma generală a modelului de regresie de tip ANCOVA cu două variabile alternative și o variabilă cantitativă este:
a) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \varepsilon$
b) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \beta \cdot X + \varepsilon$

c) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D_1 + \alpha_2 \cdot D_2 + \beta \cdot X + \varepsilon$

d) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D_1 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \varepsilon$

4. Forma generală a modelului de regresie de tip ANCOVA cu o variabilă alternativă şi două variabile cantitative este:

a) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \varepsilon$

b) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \beta \cdot X + \varepsilon$

c) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D_1 + \alpha_2 \cdot D_2 + \beta \cdot X + \varepsilon$

d) $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D_1 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \varepsilon$

5. În modelul de regresie de tip ANCOVA de forma: $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \beta \cdot X + \varepsilon$, parametrul α_0 reprezintă:

a) valoarea medie a variabilei dependente pentru acea categorie de unităţi din populaţie care nu îndeplinesc condiţia prin care se defineşte variabila dummy, respectiv pentru $D=0$, în cazul în care $X=0$

b) valoarea medie a variabilei dependente pentru acea categorie de unităţi din populaţie care îndeplinesc condiţia prin care se defineşte variabila dummy, respectiv pentru $D=1$, în cazul în care $X=0$

c) diferenţa dintre mediile celor două categorii de unităţi delimitate de variabila alternativă, în condiţia în care $X=0$

6. În modelul de regresie de tip ANCOVA de forma: $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \beta \cdot X + \varepsilon$, parametrul α_1 reprezintă:

a) valoarea medie a variabilei dependente pentru acea categorie de unităţi din populaţie care nu îndeplinesc condiţia prin care se defineşte variabila dummy, respectiv pentru $D=0$, în cazul în care $X=0$

b) valoarea medie a variabilei dependente pentru acea categorie de unităţi din populaţie care îndeplinesc condiţia prin care se defineşte variabila dummy, respectiv pentru $D=1$, în cazul în care $X=0$

c) diferenţa dintre mediile celor două categorii de unităţi delimitate de variabila alternativă, în condiţia în care $X=0$

7. În modelul de regresie de tip ANCOVA de forma: $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \beta \cdot X + \varepsilon$, parametrul $\alpha_0 + \alpha_1$ reprezintă:

a) valoarea medie a variabilei dependente pentru acea categorie de unităţi din populaţie care nu îndeplinesc condiţia prin care se defineşte variabila dummy, respectiv pentru $D=0$, în cazul în care $X=0$

BCU ASE CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) valoarea medie a variabilei dependente pentru acea categorie de unități din populație care îndeplinesc condiția prin care se definește variabila dummy, respectiv pentru $D=1$, în cazul în care $X=0$
c) diferența dintre mediile celor două categorii de unități delimitate de variabila alternativă, în condiția în care $X=0$

8. În modelul de regresie de tip ANCOVA de forma: $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D + \beta \cdot X + \varepsilon$, parametrul β reprezintă:
a) valoarea medie a variabilei dependente pentru acea categorie de unități din populație care nu îndeplinesc condiția prin care se definește variabila dummy, respectiv pentru $D=0$, în cazul în care $X=0$
b) valoarea medie a variabilei dependente pentru acea categorie de unități din populație care îndeplinesc condiția prin care se definește variabila dummy, respectiv pentru $D=1$, în cazul în care $X=0$
c) variația în medie a nivelului variabilei Y, la o creștere cu o unitate a nivelului variabilei X, pentru ambele categorii ale populației

9. În modelul de regresie de tip ANCOVA de forma: $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D_1 + \alpha_2 \cdot D_2 + \beta \cdot X + \varepsilon$, parametrul α_0 reprezintă:
a) valoarea medie a variabilei dependente pentru $D_1=0$ *şi* $D_2=0$, în condiția în care $X=0$
b) valoarea medie a variabilei dependente pentru $D_1=0$ *şi* $D_2=1$, în condiția în care $X=0$
c) valoarea medie a variabilei dependente pentru $D_1=1$ *şi* $D_2=0$, în condiția în care $X=0$

10. Pentru o populație împărțită în trei grupe, se definesc două variabile dummy, după cum urmează: D_1, cu $D_1=1$, dacă unitățile populației aparțin primei grupe în care este împărțită populația şi $D_1=0$, dacă aparțin celorlalte grupe; D_2, cu $D_2=1$, dacă unitățile populației aparțin celei de-a doua grupe a populației şi $D_2=0$, dacă aparțin celorlalte grupe. În modelul de regresie de tip ANCOVA de forma: $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot D_1 + \alpha_2 \cdot D_2 + \beta \cdot X + \varepsilon$, parametrul α_1 reprezintă:
a) diferența dintre media grupei 1 şi media grupei 3 pentru variabila dependentă, în condiția în care $X=0$
b) diferența dintre media grupei 2 şi media grupei 3 pentru variabila dependentă, în condiția în care $X=0$
c) valoarea medie a variabilei dependente pentru unitățile din grupa 3 a populației, în condiția în care $X=0$

11. Pentru o populaţie împărţită în trei grupe, se definesc două variabile dummy, după cum urmează: D_1, cu $D_1=1$, dacă unităţile populaţiei aparţin primei grupe în care este împărţită populaţia şi $D_1=0$, dacă aparţin celorlalte grupe; D_2, cu $D_2=1$, dacă unităţile populaţiei aparţin celei de-a doua grupe a populaţiei şi $D_2=0$, dacă aparţin celorlalte grupe. În modelul de regresie de tip ANCOVA de forma: $Y=\alpha_0+\alpha_1\cdot D_1+\alpha_2\cdot D_2+\beta\cdot X+\varepsilon$, parametrul α_2 reprezintă:

a) diferenţa dintre media grupei 1 şi media grupei 3 pentru variabila dependentă, în condiţia în care $X=0$

b) diferenţa dintre media grupei 2 şi media grupei 3 pentru variabila dependentă, în condiţia în care $X=0$

c) valoarea medie a variabilei dependente pentru unităţile din grupa 3 a populaţiei, în condiţia în care $X=0$

12. În studiul legăturii dintre *Durata medie a vieţii (Y, ani), Sexul persoanei (D,* unde *D=1* pentru *sexul masculin şi D=0* pentru *sexul feminin)* şi *PIB pe locuitor* (*X, euro*), pentru datele înregistrate în diferite ţări din Uniunea Europeană, s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
		B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1	(Constant)	71,131	2,315		30,727	,000
	Sexul_pers	-6,975	2,474	-,401	-2,819	,009
	PIB_locuitor	,0004	,0001	,539	3,784	,001

a. Dependent Variable: Sper_viata

Sursa: *Prelucrat după Eurostat Yearbook 2008*

Pentru exemplul considerat, modelul estimat al legăturii dintre variabile este de forma:

a) $Y=2,315+2,474\cdot D+0,0001\cdot X$

b) $Y=30,727-2,819\cdot X+3,784\cdot D$

c) $Y=71,131-6,975\cdot D+0,0004\cdot X$

13. În studiul legăturii dintre *Durata medie a vieţii (Y, ani), Sexul persoanei (D,* unde *D=1,* pentru *sexul masculin şi D=0,* pentru *sexul feminin)* şi *PIB pe locuitor* (*X, euro*), pentru datele înregistrate în diferite ţări din Uniunea Europeană, s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	71,131	2,315		30,727	,000
	Sexul_pers	-6,975	2,474	-,401	-2,819	,009
	PIB_locuitor	,0004	,0001	,539	3,784	,001

a. Dependent Variable: Sper_viata

Valorile estimate ale parametrilor modelului de tip ANCOVA arată că:

a) nivelul mediu al *Duratei medii a vieții* pentru persoanele de sex feminin, atunci când nivelul *PIB pe locuitor* este nul, este de 71,131~71 ani

b) nivelul mediu al *Duratei medii a vieții* pentru persoanele de sex masculin, atunci când nivelul *PIB pe locuitor* este nul, este de 64,156~64 ani

c) diferența dintre nivelul mediu al *Duratei medii a vieții* pentru persoanele de sex feminin și masculin este de 6,975~7 ani

14. În studiul legăturii dintre *Durata medie a vieții (Y, ani), Sexul persoanei (D,* unde *D=1,* pentru *sexul masculin și D=0,* pentru *sexul feminin)* și *PIB pe locuitor* (*X, euro*), pentru datele înregistrate în diferite țări din Uniunea Europeană, s-au obținut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	71,131	2,315		30,727	,000
	Sexul_pers	-6,975	2,474	-,401	-2,819	,009
	PIB_locuitor	,0004	,0001	,539	3,784	,001

a. Dependent Variable: Sper_viata

Valorile estimate ale parametrilor modelului de tip ANCOVA arată că:

a) există diferențe semnificative între nivelul mediu al *Duratei medii a vieții* pentru persoanele de sex masculin și feminin, considerând un risc de 0,05

b) nu există diferenţe semnificative între nivelul mediu al *Duratei medii a vieţii* pentru persoanele de sex masculin şi feminin, considerând un risc de 0,05
c) există diferenţe semnificative între nivelul mediu al *Duratei medii a vieţii* pentru persoanele de sex masculin şi feminin, considerând un risc de 0,95

15. În studiul legăturii dintre *Câştigul salarial nominal net* (*Y, mii lei*), *Sexul persoanei* (D_1, unde $D_1=1$, pentru persoanele de sex masculin, $D_1=0$, pentru persoanele de sex feminin) şi *Numărul de ani de şcoală* (*X, ani*), pentru datele înregistrate în ţări din diferite regiuni (D_2, unde $D_2=1$, pentru ţările din regiunea A, $D_2=0$, pentru ţările din regiunea B), s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	3,283	1,361		2,413	,022
	sexul	3,418	1,090	,325	3,135	,004
	regiunea	3,771	1,276	,359	2,954	,006
	ani_scoala	,377	,137	,373	2,758	,010

a. Dependent Variable: salariu

Pentru exemplul considerat, modelul estimat al legăturii dintre variabile este de forma:

a) $Y = 1,361 + 1,090 \cdot D_1 + 1,276 \cdot D_2 + 0,137 \cdot X$

b) $Y = 3,283 + 3,418 \cdot D_1 + 0,337 \cdot D_2 + 3,771 \cdot X$

c) $Y = 3,283 + 3,418 \cdot D_1 + 3,771 \cdot D_2 + 0,377 \cdot X$

16. În studiul legăturii dintre *Câştigul salarial nominal net* (*Y, mii lei*), *Sexul persoanei* (D_1, unde $D=1$, pentru *sexul masculin şi* $D_1=0$, pentru *sexul feminin)* şi *Numărul de ani de şcoală (X, ani)*, pentru datele înregistrate în ţări din diferite regiuni (D_2, cu $D_2=1$, pentru ţările din regiunea A, $D_2=0$, pentru ţările din regiunea B), s-au obţinut următoarele rezultate:

BCU "MIHAIL KOGĂLNICEANU" BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	3,283	1,361		2,413	,022
	sexul	3,418	1,090	,325	3,135	,004
	regiunea	3,771	1,276	,359	2,954	,006
	ani_scoala	,377	,137	,373	2,758	,010

a. Dependent Variable: salariu

Valorile estimate ale parametrilor modelului de tip ANCOVA arată că:

a) nivelul mediu al *Câştigul salarial nominal net* pentru persoanele de sex feminin din *regiunea A*, atunci când *Numărul de ani de şcoală* este nul, este de 3,283 mii lei

b) nivelul mediu al *Câştigul salarial nominal net* pentru persoanele de sex feminin din *regiunea B*, atunci când *Numărul de ani de şcoală* este nul, este de 3,283 mii lei

c) persoanele din *regiunea A* obţin, în medie, un *Câştig salarial nominal net* mai mare cu 3,771 mii lei faţă de persoanele din *regiunea B*

d) persoanele din *regiunea B* obţin, în medie, un *Câştig salarial nominal net* mai mare cu 3,771 mii lei faţă de persoanele din *regiunea A*

17. În studiul legăturii dintre *Câştigul salarial nominal net* (*Y, mii lei*), *Sexul persoanei* (D_1, unde $D_1=1$, pentru *sexul masculin şi* $D_1=0$, pentru *sexul feminin)* şi *Numărul de ani de şcoală* (*X, ani*), pentru datele înregistrate în ţări din diferite regiuni (D_2, cu $D_2=1$, pentru ţările din regiunea A, $D_2=0$, pentru ţările din regiunea B), s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	3,283	1,361		2,413	,022
	sexul	3,418	1,090	,325	3,135	,004
	regiunea	3,771	1,276	,359	2,954	,006
	ani_scoala	,377	,137	,373	2,758	,010

a. Dependent Variable: salariu

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru exemplul dat, considerând un risc $\alpha = 0,05$, se poate afirma că:
a) există diferenţe semnificative între nivelurile medii ale *Câştigului salarial nominal net* pe sexe, asumându-ne un risc de *0,05*
b) nu există diferenţe semnificative între nivelurile medii ale *Câştigului salarial nominal net* pe sexe, asumându-ne un risc de *0,05*
c) există diferenţe semnificative între nivelurile medii ale *Câştigului salarial nominal net* pe regiuni, asumându-ne un risc de *0,05*

18. În studiul legăturii dintre *Durata medie a vieţii* (*Y, ani*), *Sexul persoanei* (D_1, unde $D_1=1$, pentru *sexul masculin* şi $D_1=0$, pentru *sexul feminin)* şi *Nivelul salariului minim pe economie (X, euro)* pentru datele înregistrate în ţări din diferite regiuni (D_2, unde $D_2=1$, pentru ţările din regiunea A şi $D_2=0$, pentru ţările din regiunea B), s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
		B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1	(Constant)	76,569	,774		98,913	,000
	Sexul_pers	-7,000	,784	-,724	-8,933	,000
	Salariu_minim	,004	,002	,422	2,317	,027
	Regiunea	1,012	1,809	,102	,559	,580

a. Dependent Variable: Sper_viata

Pentru exemplul dat, considerând un risc $\alpha = 0,05$, se poate afirma că:
a) există diferenţe semnificative între nivelurile medii ale *speranţei de viaţă* pe sexe, asumându-ne un risc de *0,05*
b) există diferenţe semnificative între nivelurile medii ale *speranţei de viaţă* pe regiuni, asumându-ne un risc de *0,05*
c) nu există diferenţe semnificative între nivelurile medii ale *speranţei de viaţă* pe regiuni, asumându-ne un risc de *0,05*

19. În studiul legăturii dintre *Câştigul salarial nominal net* (*Y, mii lei*), *Sexul persoanei* (*D*, unde *D=1,* pentru persoanele de *sex masculin*, *D=0*, pentru persoanele de *sex feminin*), *Numărul de ani de şcoală* (X_1, *ani*) şi *Vârsta* (X_2, *ani),* înregistrate pentru un eşantion format din 44 de persoane, s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	-4,017	1,949		-2,061	,046
	sexul	-4,422	1,566	-,324	-2,823	,007
	ani_scoala	,635	,169	,492	3,746	,001
	varsta	,269	,082	,535	3,301	,002

a. Dependent Variable: salariu

Pentru exemplul considerat, modelul estimat al legăturii dintre variabile este de forma:

a) $Y = 1,949 + 1,566 \cdot D + 0,169 \cdot X_1 + 0,082 \cdot X_2$

b) $Y = -4,017 - 4,422 \cdot D + 0,635 \cdot D_2 + 0,269 \cdot X_1$

c) $Y = -4,017 - 4,422 \cdot D + 0,635 \cdot X_1 + 0,269 \cdot X_2$

20. În studiul legăturii dintre *Câştigul salarial nominal net* (*mii lei*), *Sexul persoanei* (*D*, unde *D=1*, pentru persoanele de *sex masculin*, *D=0*, pentru persoanele de *sex feminin*), *Numărul de ani de şcoală* (*ani*) şi *Vârsta (ani)*, înregistrate pentru un eşantion format din 44 de persoane, s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	-4,017	1,949		-2,061	,046
	sexul	-4,422	1,566	-,324	-2,823	,007
	ani_scoala	,635	,169	,492	3,746	,001
	varsta	,269	,082	,535	3,301	,002

a. Dependent Variable: salariu

Valorile estimate ale parametrilor modelului de tip ANCOVA arată că:

a) nivelul mediu al *Câştigului salarial nominal net* pentru persoanele de sex feminin este mai mare, în medie, cu 4,422 mii lei faţă de cel al persoanelor de sex masculin, considerând constată influenţa celorlalte variabile

b) nivelul mediu al *Câştigului salarial nominal net* pentru persoanele de sex masculin este mai mare, în medie, cu 4,422 mii lei faţă de cel al persoanelor de sex feminin, fără a considera influenţa celorlalte variabile

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) nivelul *Câştigului salarial nominal net* creşte, în medie, cu 0,635 mii lei la o creştere cu un an a *Numărului de ani de şcoală*, pentru ambele sexe, în condiţiile în care vârsta rămâne constantă

21. În studiul legăturii dintre *Câştigul salarial nominal net* (*mii lei*), *Sexul persoanei* (*D*, unde *D=1*, pentru persoanele de sex masculin, *D=0*, pentru persoanele de sex feminin), *Numărul de ani de şcoală* (*ani*) şi *Vârsta (ani)*, înregistrate pentru un eşantion format din 44 de persoane, s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-4,017	1,949		-2,061	,046
	sexul	-4,422	1,566	-,324	-2,823	,007
	ani_scoala	,635	,169	,492	3,746	,001
	varsta	,269	,082	,535	3,301	,002

a. Dependent Variable: salariu

Pentru exemplul dat, considerând un risc $\alpha = 0,05$, se poate afirma că:

a) există diferenţe semnificative între nivelurile medii ale *Câştigului salarial nominal net* pe sexe, asumându-ne un risc de *0,05*

b) nu există diferenţe semnificative între nivelurile medii ale *Câştigului salarial nominal net* pe sexe, asumându-ne un risc de 0,05

c) există diferenţe semnificative între nivelurile medii ale *Câştigului salarial nominal net,* în funcţie de numărul de ani de şcoală, asumându-ne un risc de *0,05*

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezultate pentru testele grilă

Număr test	Răspunsuri corecte
1	b
2	b
3	c
4	d
5	a
6	c
7	b
8	c
9	a
10	a
11	b
12	c
13	a, b, c
14	a
15	c
16	b, c
17	a, c
18	a, c
19	c
20	a, c
21	a, c

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul 5

VERIFICAREA IPOTEZELOR MODELULUI CLASIC DE REGRESIE

1.	Ipoteze cu privire la erori
	Probleme
	Teste grilă
2.	Ipoteze cu privire la variabilele independente
	Probleme
	Teste grilă

În acest capitol, sunt prezentate probleme rezolvate şi teste grilă care privesc etapa testării ipotezelor modelului clasic de regresie. Aceste ipoteze se referă la variabila reziduală din modelul de regresie, precum şi la variabilele independente.

BCU CLUJ / BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITY LIBRARY

5.1. Ipoteze cu privire la erori

În procesul de modelare econometrică, se testează următoarele ipoteze cu privire la erorile de modelare:

- media erorilor este egală cu zero: $M(\varepsilon_i)=0$;
- normalitatea erorilor la nivelul repartiţiilor condiţionate de tipul $Y_i|X=x_i$: $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$, adică variabila reziduală urmează o lege de repartiţie normală de medie zero şi varianţă σ^2;
- homoscedasticitate: $V(\varepsilon_i)=M(\varepsilon_i^2)=\sigma^2$, adică varianţa erorii este constantă la nivelul repartiţiilor condiţionate de tipul $Y_i|X=x_i$;
- necorelarea erorilor: $cov(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0$, adică erorile nu se influenţează reciproc;
- lipsa corelaţiei dintre variabila independentă şi variabila eroare: $cov(\varepsilon,X)=0$.

5.1.1. Probleme rezolvate

Problema 1

Pentru erorile estimate în procesul de modelare a două variabile, *X* şi *Y*, s-au obţinut rezultatele din tabelul de mai jos.

One-Sample Test

	Test Value = 0					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Unstandardized Residual	,056	40	,956	1,1232176	-39,6001	41,84650

Sursa: *Date convenţionale*

Se cere să se testeze dacă este respectată ipoteza: $M(\varepsilon_i)=0$ (media erorilor este egală cu zero), considerând un risc de *0,05*.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

Testarea se realizează cu ajutorul testului *Student*, pentru care se parcurg următoarele etape:

Formularea ipotezelor

$H_0 : M(\varepsilon_i) = 0$ (media erorilor este egală cu zero);

$H_1 : M(\varepsilon_i) \neq 0$ (media erorilor diferă semnificativ de zero).

Alegerea statisticii test

În acest caz, se utilizează statistica *Student*, care are relația:

$$t = \frac{\hat{M}(\varepsilon) - M(\varepsilon)}{\sqrt{\hat{V}(\hat{M}(\varepsilon))}}.$$

Valoarea teoretică a testului

Din tabela *Student*, se citește valoarea teoretică:

$t_{\alpha/2;n-1} = t_{0,025;40} = 1,96$.

Valoarea calculată a testului

Din tabelul de rezultate, se observă că valoarea calculată a statisticii test este: $t_{calc} = 0,056$.

Regula de decizie

Dacă $t_{calc} \in [-1,96;1,96]$, se acceptă ipoteza nulă. În caz contrar, aceasta se respinge cu o probabilitate de 0,95.

Interpretare

Atât valoarea calculată a testului (egală cu *0,056,* mai mică decât valoarea teoretică din tabela *Student*), cât și semnificația testului (*Sig t = 0,956,* mai mare decât *0,05*) permit luarea deciziei de a accepta ipoteza nulă, adică ipoteza că media erorilor nu diferă semnificativ de valoarea zero (*Test Value = 0*).

Problema 2

Rezultatele modelării econometrice pentru variabilele *Nivel de educație* (ani) și *Salariu* (Euro), pentru un set de date înregistrate la nivelul unui eșantion de 474 de angajați, sunt prezentate în tabelul de mai jos.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Correlations

			Erori_ absolute	Nivel educatie (ani)
Spearman's rho	Erori_absolute	Correlation Coefficient	1,000	,268**
		Sig. (2-tailed)	.	,000
		N	474	474
	Nivel educatie (ani)	Correlation Coefficient	,268**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,000	.
		N	474	474

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Sursa: *Prelucrat după baza de date Employee data din SPSS*

Se cere să se testeze ipoteza de homoscedasticitate a erorilor modelului de regresie, considerând un risc de 0,05.

Rezolvare

Demersul testării cuprinde următoarele etape:

Formularea ipotezelor

$H_0 : V(\varepsilon_i) = \sigma^2$ (erorile sunt homoscedastice);

$H_1 : V(\varepsilon_i) \neq \sigma^2$ (erorile sunt heteroscedastice).

Alegerea statisticii test

Prin metoda testului corelaţiei neparametrice între erorile estimate şi valorile variabilei independente, homoscedasticitatea erorilor este testată cu ajutorul statisticii *Student* de forma:

$$t = \frac{\hat{\theta}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{\theta}^2}} \sim t(n-2).$$

Valoarea teoretică a testului

Din tabela *Student*, pentru un prag de semnificaţie de *0,05* şi un volum al eşantionului de 474, se citeşte valoarea teoretică a testului: $t_{0,025;472} = 1,96$.

Valoarea calculată a testului

Pe baza rezultatelor din tabelul de rezultate, se obţine valoarea calculată a testului, folosind relaţia:

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$t_{calc} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$, unde $r = 0,268$.

În urma calculelor, se obține: $t_{calc} = 6,05$.

Regula de decizie

Decizia se ia prin compararea valorii calculate a testului cu valoarea teoretică din tabel: dacă $t_{calc} \in [-1,96;1,96]$, se acceptă ipoteza nulă, în caz contrar, aceasta se respinge cu o probabilitate de 0,95.

Interpretarea rezultatului

Deoarece $t_{calc} > 1,96$, se respinge ipoteza nulă cu o probabilitate de *0,95*, adică erorile sunt heteroscedastice.

Problema 3

În vederea testării ipotezei de homoscedasticitate a erorilor de modelare cu ajutorul testului Goldfeld-Quandt, seria valorilor inițiale pentru două variabile, *X, Y,* a fost împărțită în două grupe, după valorile ordonate ale variabilei independente. Pentru aceste seturi de date, s-au estimat două modele de regresie de forma:

$Y_1 = 4,4 + 3 \cdot X_1$;

$Y_2 = 1,24 + 3,6 \cdot X_2$.

Estimațiile componentelor variației, pentru cele două modele de regresie, sunt prezentate în tabelele de mai jos.

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	90,000	1	90,000	24,107	,016[a]
	Residual	11,200	3	3,733		
	Total	101,200	4			

a. Predictors: (Constant), X

b. Dependent Variable: Y

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	219,184	1	219,184	27,843	,013[a]
	Residual	23,616	3	7,872		
	Total	242,800	4			

a. Predictors: (Constant), X

b. Dependent Variable: Y

Sursa: *Date convenţionale*

Se cere să se prezinte etapele testării ipotezei de homoscedasticitate a erorilor modelului de regresie, considerând un risc de 5%.

Rezolvare

Formularea ipotezelor

$H_0 : V(\varepsilon_i) = \sigma^2$ (erorile sunt homoscedastice).

$H_1 : V(\varepsilon_i) \neq \sigma^2$ (erorile sunt heteroscedastice).

Calculul statisticii test

Testul Goldfeld-Quandt se bazează pe compararea variaţiilor reziduale estimate (*RSS*) pentru cele două modele de regresie rezultate din împărţirea seriei de date iniţiale în două subserii.

Valoarea calculată a testului este:

$F_{calc} = \dfrac{RSS_2}{RSS_1}$, unde RSS_1 corespunde *celei mai mici valori* a variaţiei reziduale.

Pentru rezultatele obţinute în tabelele ANOVA de mai sus, se citesc valorile *RSS*, astfel: $RSS_1 = 11,2$; $RSS_2 = 23,616$.

Raportul F se calculează după relaţia:

$$F_{calc} = \frac{RSS_2}{RSS_1} = \frac{23,616}{11,2} = 2,108.$$

Valoarea teoretică a statisticii F

Valoarea teoretică a statisticii *F* se citeşte din tabelul Fisher, pentru un risc $\alpha=0,05$ şi $(n - k) = 3$ grade de libertate (numărul gradelor de libertate apare în output-ul ANOVA, în coloana *df*). Această valoare este: $F_{0,05,3,3} = 9,277$.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Stabilirea regulii de decizie

Dacă $F_{calc} \leq F_{\alpha;n-k;n-k'}$, se acceptă ipoteza H_o.

Dacă $F_{calc} > F_{\alpha;n-k;n-k}$, se respinge ipoteza H_o, cu o probabilitate de *0,95*

Interpretarea rezultatului

$F_{calc} = 2,108 < F_{0,05;3;3} = 9,277$. Acest rezultat conduce la decizia de a accepta ipoteza *Ho;* adică erorile de modelare ale modelului de regresie sunt homoscedastice.

Problema 4

În urma analizei legăturii dintre două variabile, *X (Rata inflației, %)* și *Y (PIB/loc, Euro)*, s-au obținut următoarele rezultate:

Correlations

			Error for PIB	rata_inflatiei
Spearman's rho	Error for PIB	Correlation Coefficient	1,000	-,260
		Sig. (2-tailed)	.	,440
		N	11	11
	rata_inflatiei	Correlation Coefficient	-,260	1,000
		Sig. (2-tailed)	,440	.
		N	11	11

Sursa: *Date convenționale*

Se cere să se testeze ipoteza de homoscedasticitate a erorilor modelului de regresie, considerând un risc $\alpha = 0,05$.

Rezolvare

Formularea ipotezelor

$H_0 : V(\varepsilon_i) = \sigma^2$ (erorile sunt homoscedastice);

$H_1 : V(\varepsilon_i) \neq \sigma^2$ (erorile sunt heteroscedastice).

Alegerea statisticii test

Prin metoda testului corelației neparametrice între erorile estimate și valorile variabilei independente, homoscedasticitatea erorilor este testată cu ajutorul statisticii *Student* de forma:

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$t = \frac{\hat{\theta}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{\theta}^2}} \sim t(n-2).$$

Valoarea teoretică a testului

Din tabela *Student*, pentru un prag de semnificaţie de *0,05* şi un volum al eşantionului de $n = 11$, se citeşte valoarea teoretică a testului: $t_{0,025;9} = 2,262$.

Valoarea calculată a testului

Pe baza rezultatelor din tabelul de mai sus, se obţine valoarea calculată a testului, folosind relaţia:

$$t_{calc} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{-0,26 \cdot \sqrt{11-2}}{\sqrt{1-0,26^2}} = \frac{-0,78}{0,96} = -0,81,$$ unde,

$r = -0,26$ este coeficientul corelaţiei neparametrice dintre variabila independentă şi variabila eroare în valoare absolută.

Regula de decizie

Decizia se ia prin compararea valorii calculate a testului cu valoarea teoretică din tabel: dacă $t_{calc} \in [t_{\alpha/2;n-2}; t_{\alpha/2;n-2}]$, se acceptă ipoteza nulă, iar în caz contrar, aceasta se respinge, cu o probabilitate de 0,95.

Interpretarea rezultatului

Deoarece $t_{calc} \in [-2,262; 2,262]$, se acceptă ipoteza nulă, adică erorile de modelare sunt homoscedastice.

Problema 5

În urma analizei de regresie realizate pentru două variabile, *X (Educaţie, ani)* şi *Y (Salariu, $)*, s-a obţinut output-ul alăturat.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Error for salary with educ from CURVEFIT, MOD_7 LINEAR
N		474
Normal Parameters[a,b]	Mean	,0000000
	Std. Deviation	12819,96639730
Most Extreme Differences	Absolute	,110
	Positive	,110
	Negative	-,069
Kolmogorov-Smirnov Z		2,400
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Sursa: *Prelucrat după baza de date Employee data din SPSS*

Se cere să se prezinte demersul testării normalității pentru erorile de modelare, considerând un risc de 0,05.

Rezolvare

Demersul testării cuprinde următoarele etape:

Formularea ipotezelor

Ipoteza nulă și ipoteza alternativă sunt:

$H_0 : \varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ (erorile urmează o lege normală).

$H_1 : \varepsilon_i \neq N(0,\sigma^2)$ (erorile nu urmează o lege de repartiție normală).

Alegerea testului

În procesul de testare a normalității erorilor de modelare, se utilizează testul neparametric Kolmogorov-Smirnov.

Stabilirea regulii de decizie

Decizia de a accepta sau de a respinge ipoteza nulă se ia pe baza comparării pragului de semnificație $\alpha = 0,05$, cu semnificația testului, *Sig.* Astfel, dacă $Sig. \geq 0,05$ se acceptă ipoteza nulă, iar dacă $Sig. < 0,05$, se respinge ipoteza de normalitate a erorilor.

Interpretarea rezultatului

Din tabelul cu rezultate, se citește valoarea $Sig. = 0,00$. În concluzie, cu o probabilitate de *0,95* (sau un risc de *0,05*), se respinge ipoteza de normalitate a erorilor de modelare.

BCU "CAROL I" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Problema 6

Indicatorii formei repartiţiei erorilor estimate ale unui model de regresie între două variabile, X şi Y, sunt:

- coeficientul de asimetrie Fisher estimat: $sw = -0,07$;
- coeficientul de boltire Fisher estimat: $ku = 0,18$.

Pentru un risc de 0,05 şi un volum al eşantionului egal cu 100, se cere să se testeze ipoteza de normalitate a erorilor modelului de regresie.

Rezolvare

Demersul testării, cu ajutorul testului Jarque-Bera, cuprinde următoarele etape:

Formularea ipotezelor

$H_0 : \varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ (erorile urmează o lege normală).

$H_1 : \varepsilon_i \neq N(0,\sigma^2)$ (erorile nu urmează o lege normală).

Alegerea statisticii test

Statistica test utilizată este statistica Jarque-Bera, care are relaţia:

$$JB = \frac{n}{6}\left(\hat{Sw}^2 + \frac{\hat{KU}^2}{4} \right) \sim \chi^2(2).$$

Valoarea teoretică a testului

Din tabela χ^2 se citeşte valoarea critică $\chi^2_{0,05;2} = 5,99$.

Valoarea calculată a testului

Pe baza relaţiei: $JB_{calc} = \frac{n}{6}\left(sw^2 + \frac{ku^2}{4} \right)$, în urma calculelor, se obţine valoarea: $JB_{calc} = 0,21$.

Regula de decizie

Dacă $JB_{calc} \leq \chi^2_{\alpha,2}$, se acceptă ipoteza de normalitate a erorilor, iar în caz contrar, se respinge, cu o probabilitate de 0,95.

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITARA

Interpretarea rezultatului

Deoarece $JB_{calc} < \chi^2_{0,05;2}$, se acceptă ipoteza nulă, adică erorile de modelare respectă condiția de normalitate.

Problema 7

Pentru erorile estimate în urma modelării econometrice a dependenței dintre variabilele *Salariu* ($) și *Nivel de educație* (ani de studii), s-a construit diagrama de mai jos.

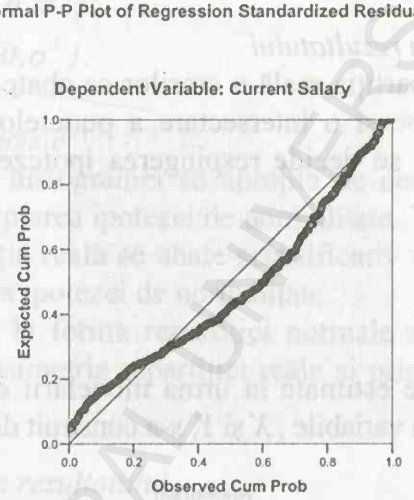


Figura 5.1. *Diagrama P-P Plot a erorilor de modelare*
Sursa: *Prelucrat după baza de date Employee data din SPSS*

Se cere să se testeze ipoteza de normalitate a erorilor modelului de regresie.

Rezolvare

Reprezentarea grafică de mai sus poartă numele de *P-P Plot Diagram* sau *Dreapta Henry*. În această diagramă, sunt reprezentate vizual două repartiții ale valorilor erorilor: repartiția reală a valorilor estimate standardizate și repartiția teoretică a erorilor (vizual este o dreaptă), care se obține cu ajutorul funcției lui Laplace. Testul presupune compararea vizuală a celor două repartiții.

Formularea ipotezelor

$H_0 : \varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$;

$H_1 : \varepsilon_i \neq N(0,\sigma^2)$.

Regula de decizie

Dacă repartiția reală se apropie de cea teoretică, adică punctele reale se apropie de dreapta reprezentată în diagramă (punctele reale să fie de aceeaşi parte a dreptei şi să nu se abată de la aceasta), se decide acceptarea ipotezei de normalitate.

Dacă repartiția reală se abate de la cea teoretică (intersectează dreapta şi înregistrează abateri semnificative de la aceasta), se decide respingerea ipotezei de normalitate.

Interpretarea rezultatului

Deoarece repartiția reală a erorilor se abate semnificativ de la cea teoretică (are loc şi o intersectare a punctelor reale cu dreapta punctelor teoretice), se decide respingerea ipotezei de normalitate a erorilor de modelare.

Problema 8

Pentru erorile estimate în urma modelării econometrice a dependenței dintre două variabile , *X* şi *Y*, s-a construit diagrama de mai jos.

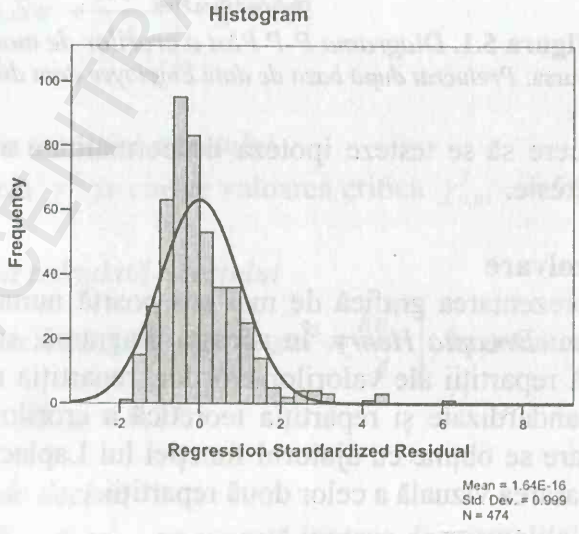


Figura 5.2. *Histograma erorilor de modelare*
Sursa: *Date convenționale*

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITARA LIBRARY

Rezolvare

Reprezentarea grafică de mai sus poartă numele de *histogramă.* În această diagramă, sunt reprezentate vizual două repartiții ale valorilor erorilor: repartiția reală a valorilor estimate (coloanele diagramei) și repartiția teoretică a acestora (vizual este o curbă, numită *clopotul lui Gauss*). Testul presupune compararea vizuală a formei celor două repartiții.

Formularea ipotezelor

$H_0 : \varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$;

$H_1 : \varepsilon_i \neq N(0,\sigma^2)$.

Regula de decizie

Dacă forma histogramei se apropie de cea a repartiției normale, se decide acceptarea ipotezei de normalitate.

Dacă repartiția reală se abate semnificativ de la cea teoretică, se decide respingerea ipotezei de normalitate.

Abaterea de la forma repartiției normale se poate realiza în două moduri: prin asimetria repartiției reale și prin boltirea sau aplatizarea acesteia.

Interpretarea rezultatului

Deoarece repartiția reală a erorilor se abate semnificativ de la cea teoretică printr-o boltire vizibilă, dar și printr-o ușoară asimetrie la dreapta, se decide respingerea ipotezei de normalitate a erorilor de modelare.

Problema 9

În vederea testării ipotezei de necorelare a erorilor unui model de regresie liniară simplă (dintre variabilele *Rata inflației, %, și PIB/loc, Euro*), prin prelucrarea datelor pentru un eșantion de volum *n=11* unități, s-au obținut următoarele rezultate:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Error for PIB_ loc with rata_ inflatiei from CURVEFIT, MOD_1 LINEA
N		11
Normal Parameters[a,b]	Mean	,0000000
	Std. Deviation	27,72357123
Most Extreme Differences	Absolute	,248
	Positive	,234
	Negative	-,248
Kolmogorov-Smirnov Z		,821
Asymp. Sig. (2-tailed)		,510

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Sursa: *Date convenţionale*

Se cere să se prezinte demersul testării normalităţii pentru erorile de modelare, considerând un risc de 0,05.

Rezolvare

Formularea ipotezelor statistice

$H_0 : \varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$;

$H_1 : \varepsilon_i \neq N(0,\sigma^2)$.

Alegerea testului

În procesul de testare, se utilizează testul Kolmogorov-Smirnov, care este un test neparametric.

Stabilirea regulii de decizie

Decizia de a accepta sau de a respinge ipoteza nulă se ia pe baza comparării pragului de semnificaţie $\alpha = 0,05$ cu semnificaţia testului, *Sig.* Astfel, dacă $Sig. \geq 0,05$, se acceptă ipoteza nulă, iar dacă $Sig. < 0,05$, se respinge ipoteza de normalitate a erorilor, cu o probabilitate de *0,95*.

Interpretarea rezultatului

Din tabelul cu rezultate, se citeşte valoarea $Sig.=0,51$. În concluzie, cu o probabilitate de *0,95*, se acceptă ipoteza de normalitate a erorilor de modelare.

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Problema 10

Pentru legătura dintre variabilele *Nivel de educație* (ani) și *Salariu* (Euro), pe baza datelor înregistrate la nivelul unui eșantion de 25 de țări, s-au obținut rezultatele din tabelul de mai jos.

Model Summary[b]

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,661[a]	,436	,435	$12,833.540	1,863

a. Predictors: (Constant), NIvel de educatie (ani)

b. Dependent Variable: Salariu (Euro)

Sursa: *Prelucrat după baza de date Employee data din SPSS*

Se cere să se testeze ipoteza de necorelare a erorilor modelului de regresie, pentru un risc de 5%.

Rezolvare

Demersul testării cuprinde următoarele etape:

Formularea ipotezelor

$H_0 : cov(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) = 0$ (erorile sunt independente);

$H_1 : cov(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) \neq 0$ (erorile sunt corelate).

Alegerea statisticii test

În testarea ipotezei de independență a erorilor, se utilizează statistica Durbin-Watson:

$$DW = d = \frac{\sum_i (\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i-1})^2}{\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2}.$$

Valoarea teoretică a testului

Din tabela Durbin-Watson, pentru un prag de semnificație de 5%, $k = 2$ parametri și un volum al eșantionului $n = 25$, se citesc valorile critice:

$d_L = 1,288$

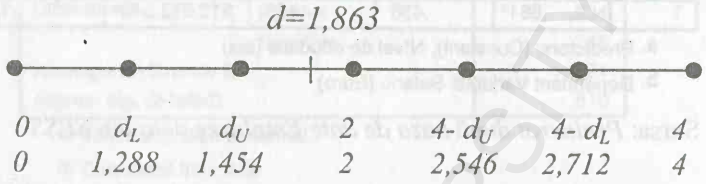
$d_U = 1,454$

Valoarea calculată a testului

Din tabelul cu rezultate de mai sus, se citeşte valoarea calculată a testului: $d = 1,863$.

Regula de decizie

Decizia se ia în funcţie de intervalele delimitate de valorile critice din tabela Durbin-Watson. Aceste intervale sunt:



unde,

- $(0 ; d_L)$ este o regiune de respingere, erorile înregistrează o autocorelare pozitivă;
- $(d_L ; d_U)$ şi $(4-d_U ; 4-d_L)$ sunt regiuni de nedeterminare şi nu permit luarea unei decizii asupra existenţei autocorelării erorilor;
- $(d_U ; 4- d_U)$ este o regiune de acceptare a ipotezei nule, erorile nu sunt autocorelate;
- $(4-d_L ; 4)$ este o regiune de respingere, erorile înregistrează o autocorelare negativă.

Interpretarea rezultatului

Conform intervalelor de mai sus, valoarea calculată a testului, $d = 1,863$, se află în intervalul $(d_U ; 4- d_U)$, care este regiunea de acceptare a ipotezei nule. În concluzie, se acceptă ipoteza că erorile nu sunt autocorelate (sunt independente).

Problema 11

Pentru erorile estimate în urma modelării econometrice a dependenţei dintre două variabile, X şi Y, s-au obţinut rezultatele din tabelul alăturat.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Runs Test

	Unstandardized Residual
Test Value[a]	-2502.56250
Cases < Test Value	237
Cases >= Test Value	237
Total Cases	474
Number of Runs	219
Z	-1.747
Asymp. Sig. (2-tailed)	.081

a. Median

Sursa: *Date convenționale*

Se cere să se testeze ipoteza de independență a erorilor modelului de regresie, pentru un risc de 5%.

Formularea ipotezelor

$H_0 : cov(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) = 0$ (erorile sunt independente);

$H_1 : cov(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) \neq 0$ (erorile sunt corelate).

Alegerea testului

Pentru testare, așa cum indică rezultatele din tabelul de mai sus, se utilizează un test neparametric numit *Runs Test.*

Stabilirea regulii de decizie

Decizia de a accepta sau de a respinge ipoteza nulă se ia pe baza comparării pragului de semnificație $\alpha = 0,05$ cu semnificația testului, *Sig.* Astfel, dacă $Sig. \geq 0,05$ se acceptă ipoteza nulă, iar dacă $Sig. < 0,05$, se respinge ipoteza de normalitate a erorilor, cu o probabilitate de *0,95*.

Interpretarea rezultatului

Din tabelul cu rezultate, se citește valoarea $Sig. = 0,081$. În concluzie, se acceptă ipoteza de independență sau de necorelare a erorilor de modelare.

BCU "LUCIAN BLAGA" UNIVERSITY LIBRARY

5.1.2. Teste grilă

1. Ipotezele statistice care se testează în procesul de modelare econometrică se formulează cu privire la:
a) erorile de modelare
b) variabilele independente
c) variabila dependentă

2. Ipotezele modelului clasic de regresie care se formulează cu privire la erorile de modelare sunt:
a) media erorilor este zero
b) ipoteza de normalitate a erorilor
c) ipoteza de homoscedasticitate a erorilor
d) ipoteza de necorelare a erorilor

3. Ipotezele modelului clasic de regresie care se formulează cu privire la variabilele independente sunt:
a) ipoteza de normalitate a variabilelor X_i
b) ipoteza de homoscedasticitate a variabilelor X_i
c) ipoteza de necoliniaritate a variabilelor X_i

4. Ipotezele statistice care se formulează în cazul testării mediei erorilor sunt:
a) $H_0 : M(\varepsilon_i) = 0; H_1 : M(\varepsilon_i) \neq 0$
b) $H_0 : \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2); H_1 : \varepsilon_i \neq N(0, \sigma^2)$
c) $H_0 : V(\varepsilon_i) = \sigma^2; H_1 : V(\varepsilon_i) \neq \sigma^2$
d) $H_0 : \text{cov}(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) = 0; H_1 : \text{cov}(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) \neq 0$

5. Ipotezele statistice care se formulează în cazul testării normalității erorilor sunt:
a) $H_0 : M(\varepsilon_i) = 0; H_1 : M(\varepsilon_i) \neq 0$
b) $H_0 : \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2); H_1 : \varepsilon_i \neq N(0, \sigma^2)$
c) $H_0 : V(\varepsilon_i) = \sigma^2; H_1 : V(\varepsilon_i) \neq \sigma^2$
d) $H_0 : \text{cov}(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) = 0; H_1 : \text{cov}(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) \neq 0$

BCU KOLOZSVÁR CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

6. Ipotezele statistice care se formulează în cazul testării homoscedasticității erorilor sunt:

a) $H_0 : M(\varepsilon_i) = 0; H_1 : M(\varepsilon_i) \neq 0$

b) $H_0 : \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2); H_1 : \varepsilon_i \neq N(0, \sigma^2)$

c) $H_0 : V(\varepsilon_i) = \sigma^2; H_1 : V(\varepsilon_i) \neq \sigma^2$

d) $H_0 : \text{cov}(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) = 0; H_1 : \text{cov}(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) \neq 0$

7. Ipotezele statistice care se formulează în cazul testării necorelării erorilor sunt:

a) $H_0 : M(\varepsilon_i) = 0; H_1 : M(\varepsilon_i) \neq 0$

b) $H_0 : \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2); H_1 : \varepsilon_i \neq N(0, \sigma^2)$

c) $H_0 : V(\varepsilon_i) = \sigma^2; H_1 : V(\varepsilon_i) \neq \sigma^2$

d) $H_0 : \text{cov}(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) = 0; H_1 : \text{cov}(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) \neq 0$

8. Testarea nomalității erorilor se realizează cu ajutorul testului:

a) Jarque-Bera
b) Glejser
c) Goldfeld-Quandt
d) Durbin-Watson

9. Testarea homoscedasticității erorilor se realizează cu ajutorul testului:

a) Jarque-Bera
b) Glejser
c) Goldfeld-Quandt
d) Durbin-Watson

10. Testarea necorelării erorilor se realizează cu ajutorul testului:

a) Jarque-Bera
b) Glejser
c) Goldfeld-Quandt
d) Durbin-Watson

BCU "I. C. CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

11. Statistica Durbin-Watson poate lua valori cuprinse în intervalul:
a) $[0,4]$
b) $[-1,+1]$
c) $[0,1]$

12. În testarea autocorelării erorilor, dacă valoarea calculată a statisticii Durbin-Watson este $d = 4$, se poate considera că:
a) există autocorelare negativă maximă între erori
b) există autocorelare pozitivă maximă între erori
c) nu există autocorelare între erori

13. În testarea autocorelării erorilor, dacă valoarea calculată a statisticii Durbin-Watson este $d = 0$, se poate considera că:
a) există autocorelare negativă maximă între erori
b) există autocorelare pozitivă maximă între erori
c) nu există autocorelare între erori

14. În testarea autocorelării erorilor, dacă valoarea calculată a statisticii Durbin-Watson este $d = 2$, se poate considera că:
a) există autocorelare negativă maximă între erori
b) există autocorelare pozitivă maximă între erori
c) nu există autocorelare între erori

15. În vederea testării ipotezei privind media erorilor unui model de regresie liniară simplă, s-au obţinut următoarele rezultate:

One-Sample Test

	Test Value = 0					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
Error for PIB_loc with rata_inflatiei from CURVEFIT, MOD_1 POWER	,374	10	,717	2,1541967	-10,6936	15,00199

Pentru un risc de *0,05*, se poate considera că:
a) media erorilor de modelare diferă semnificativ de zero
b) media erorilor de modelare nu diferă semnificativ de valoarea zero
c) erorile de modelare sunt homoscedastice

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

16. În urma testării ipotezei de normalitate a erorilor unui model de regresie liniară simplă, s-au obținut următoarele rezultate:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Error for PIB_ loc with rata_ inflatiei from CURVEFIT, MOD_1 POWER
N		11
Normal Parameters[a,b]	Mean	2,1541967
	Std. Deviation	19,12416787
Most Extreme Differences	Absolute	,183
	Positive	,140
	Negative	-,183
Kolmogorov-Smirnov Z		,606
Asymp. Sig. (2-tailed)		,857

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Pentru un risc de *0,05*, se poate considera că:
a) erorile de modelare urmează o lege de repartiție normală
b) erorile de modelare nu urmează o lege de repartiție normală
c) erorile de modelare sunt independente

17. În urma testării ipotezei de normalitate a erorilor unui model de regresie liniară simplă, prin prelucrarea datelor pentru un eșantion de volum $n = 11$ unități, s-au obținut următoarele rezultate:

Descriptive Statistics

	N	Mean	Skewness		Kurtosis	
	Statistic	Statistic	Statistic	Std. Error	Statistic	Std. Error
Error for PIB	11	,0000000	-,252	,661	1,063	1,279
Valid N (listwise)	11					

Cunoscând valoarea teoretică a statisticii test, $\chi^2_{0,05;2} = 5,99$, se poate considera că:
a) erorile de modelare urmează o lege de repartiție normală
b) erorile de modelare nu urmează o lege de repartiție normală
c) erorile de modelare sunt independente

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

18. În urma testării ipotezei de homoscedasticitate a erorilor unui model de regresie liniară simplă, s-au obținut următoarele rezultate:

Correlations

			Error for PIB_loc with rata_inflatiei from CURVEFIT, MOD_1 LINEA	PIB_loc
Spearman's rho	Error for PIB_loc with rata_inflatiei from CURVEFIT, MOD_1 LINEA	Correlation Coefficien	1,000	,691*
		Sig. (2-tailed)	.	,019
		N	11	11
	PIB_loc	Correlation Coefficien	,691*	1,000
		Sig. (2-tailed)	,019	.
		N	11	11

*. Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

Pentru un risc de *0,05*, se poate considera că:
a) erorile de modelare sunt homoscedastice
b) erorile de modelare nu sunt homoscedastice
c) erorile de modelare urmează o lege de repartiție normală

19. În urma testării ipotezei de necorelare a erorilor ε ale unui model de regresie liniară simplă estimat prin prelucrarea datelor pentru un eşantion de volum n=50 unități, s-au obținut următoarele rezultate:

Model Summary[b]

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,780[a]	,609	,565	29,22321	1,483

a. Predictors: (Constant), rata_inflatiei

b. Dependent Variable: PIB_loc

Cunoscând valorile $d_L = 1{,}503$ şi $d_U = 1{,}585$, pentru un risc de *0,05*, se poate considera că:
a) erorile de modelare sunt autocorelate pozitiv
b) erorile de modelare sunt autocorelate negativ
c) nu este posibilă luarea unei decizii cu privire la existența autocorelării erorilor

20. În vederea testării ipotezei de homoscedasticitate a erorilor de modelare, s-au estimat variațiile reziduale pentru două modele de

regresie rezultate din împărțirea seriei de date inițiale, pentru două variabile *X, Y,* în două subserii. Rezultatele prelucrării datelor sunt prezentate în tabelele de mai jos:

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Regression	1171,681	1	1171,681	3084,015	,000
Residual	5,319	14	,380		
Total	1177,000	15			

The independent variable is x.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Regression	978,765	1	978,765	914,434	,000
Residual	14,985	14	1,070		
Total	993,750	15			

The independent variable is x1.

Cunoscând valoarea teoretică, $F_{0,05;14;14}=2,602$, se poate considera că:

a) $F_{calc} = 2,817 > F_{0,05;14;14} = 2,602$, ceea ce conduce la decizia de a respinge ipoteza $H_0 : V(\varepsilon_i) = \sigma^2$, cu o probabilitate de 0,95.

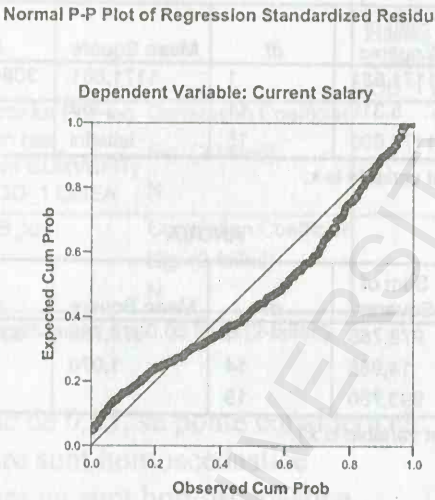
b) $F_{calc} = 0,355 < F_{0,05;14;14} = 2,602$, ceea ce conduce la decizia de a accepta ipoteza $H_0 : V(\varepsilon_i) = \sigma^2$.

c) $F_{calc} = 2,817 > F_{0,05;14;14} = 2,602$, ceea ce conduce la decizia de a respinge ipoteza $H_0 : V(\varepsilon_i) = \sigma^2$, cu o probabilitate de *0,05*.

21. Testul Durbin-Watson se utilizează pentru testarea:
a) coliniarității variabilelor factoriale
b) homoscedasticității erorilor
c) independenței erorilor

22. Un model de regresie este heteroscedastic dacă:
a) erorile de modelare sunt independente
b) variațele erorilor de modelare nu sunt egale
c) erorile au dispersia cuprinsă în intervalul (0,1)

23. Pentru erorile estimate în urma modelării econometrice a dependenței dintre variabilele *Salariu* ($) și *Nivel de educație* (ani de studii), s-a construit diagrama de mai jos.



Reprezentarea grafică de mai sus arată că:
a) erorile de modelare sunt independente
b) erorile de modelare urmează o lege de repartiție normală
c) erorile au dispersia cuprinsă în intervalul (0,1)
d) erorile de modelare nu urmează o lege de repartiție normală

24. Pentru erorile estimate în urma modelării econometrice a dependenței dintre două variabile, *X* și *Y*, s-au obținut rezultatele din tabelul de mai jos.

Runs Test

	Unstandardized Residual
Test Value[a]	-2502.56250
Cases < Test Value	237
Cases >= Test Value	237
Total Cases	474
Number of Runs	219
Z	-1.747
Asymp. Sig. (2-tailed)	.081

a. Median

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pe baza rezultatelor de mai sus, se poate considera că:
a) erorile de modelare sunt independente, iar rezultatul este garantat cu o probabilitate de 0,95
b) erorile de modelare sunt corelate, iar rezultatul este garantat cu o probabilitate de 0,95
c) erorile de modelare sunt independente, iar rezultatul este garantat cu o eroare de 0,95

25. Pentru erorile estimate în urma modelării econometrice a dependenței dintre două variabile , X şi Y, s-a construit diagrama de mai jos.

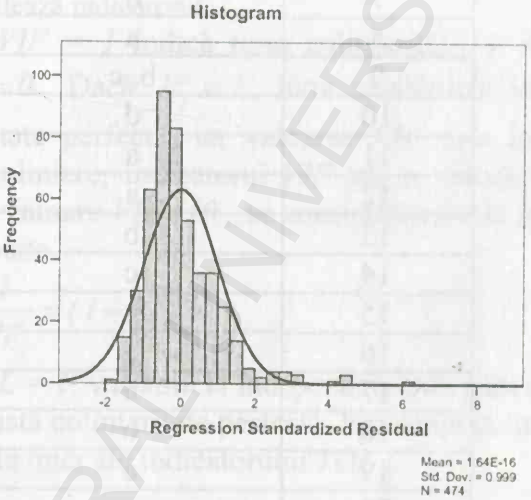


Diagrama de mai sus arată că:
a) erorile de modelare sunt dependente
b) erorile de modelare nu urmează o lege de repartiție normală
c) erorile de modelare sunt coliniare

26. Dacă este încălcată ipoteza de normalitate a erorilor, atunci se poate considera că:
a) nu se cunosc legile de repartiție ale estimatorilor parametrilor
b) erorile sunt corelate
c) nu se pot construi intervale de încredere pentru parametrii modelului

27. Încălcarea ipotezei de homoscedasticitate a erorilor conduce la:
a) pierderea proprietății de normalitate a erorilor
b) pierderea proprietății de eficiență a estimatorilor
c) apariția coliniarității

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Răspunsuri la testele grilă

Număr test	*Răspunsuri corecte*
1	a, b
2	a, b, c, d
3	c
4	a
5	b
6	c
7	d
8	a
9	b, c
10	d
11	a
12	a
13	b
14	c
15	b
16	a
17	a
18	b
19	a
20	a
21	c
22	b
23	d
24	a
25	b
26	a, c
27	b

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5.2. Ipoteze cu privire la variabilele independente

În procesul de modelare econometrică, se testează ipoteza de necorelare a variabilelor independente. Testarea acestei ipoteze se realizează cu ajutorul indicatorilor *VIF* și *TOL*, care se calculează pentru fiecare variabilă independentă din model.

$VIF_j = \frac{1}{(1-R_j^2)}$, unde j reprezintă ordinul variabilei independente pentru care se calculează indicatorul.

Valoarea $VIF = 1$ indică lipsa coliniarității și se realizează atunci când $R_j^2 = 0$. Dacă $R_j^2 = 1$, între variabilele independente, există o coliniaritate perfectă, iar valoarea *VIF* este infinită. Dacă variabilele sunt coliniare, indicatorul *VIF* are o valoare ridicată. În practică, pentru o valoare $VIF > 10$, se consideră că este prezent fenomenul de coliniaritate.

$$TOL_j = \frac{1}{VIF_j} = (1-R_j^2)$$

Pentru $TOL = 1$, variabilele independente nu sunt coliniare, iar dacă $TOL = 0$, există coliniaritate perfectă. Existența coliniarității este sugerată de valorile mici ale indicatorului *TOL*.

5.2.1. Probleme rezolvate

Problema 1

Rezultatele modelării econometrice pentru variabilele *PIB pe locuitor* (euro), *Rata de natalitate* (născuți la 1000 de locuitori), *Rata de mortalitate* (decedați la 1000 de locuitori) și *Gradul de urbanizare* (procentul persoanelor din mediul urban) sunt prezentate în tabelul de mai jos.

BCU IAȘI - CENTRU UNIVERSITY LIBRARY

Coefficients

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients			Collinearity Statistics	
		B	Std. Error	Beta	t	Sig.	Tolerance	VIF
1	(Constant)	78,774	6,430		12,252	,000		
	PIB/locuitor	,001	,000	,383	4,357	,000	,566	1,767
	Rata de natalitate	-,503	,183	-,256	-2,743	,007	,501	1,995
	Rata de mortalitate	-1,837	,408	-,323	-4,504	,000	,851	1,175

a. Dependent Variable: Grad de urbanizare (%)

Sursa: *Prelucrat după baza de date World95 din SPSS*

Se cere:

a. să se testeze ipoteza de necoliniaritate a variabilelor independente, utilizând indicatorul *VIF*;

b. pentru variabila *PIB/locuitor*, să se interpreteze valoarea indicatorului *VIF*.

Rezolvare

a. Testarea coliniarităţii

Demersul testării este următorul:

Formularea ipotezelor

H_0 : variabilele independente sunt necoliniare;

H_1 : variabilele independente sunt coliniare;

Alegerea testului

Testarea acestor ipoteze se realizează cu ajutorul indicatorului *VIF*, calculat pentru fiecare variabilă independentă după relaţia:

$$VIF_j = \frac{1}{(1-R_j^2)}, \; j = \overline{1,3}.$$

Regula de decizie

Dacă variabilele sunt coliniare, raportul de determinaţie dintre variabile este ridicat, iar indicatorul *VIF* are o valoare mare. În practică, pentru o valoare *VIF>10*, se consideră că este prezent fenomenul de coliniaritate.

Interpretare

Conform datelor din tabelul de rezultate, pentru nici o variabilă independentă, indicatorul *VIF* nu depăşeşte valoarea *2*, ceea ce indică lipsa coliniarităţii dintre variabile.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b. Interpretare VIF pentru PIB/loc

Valoarea *VIF* pentru variabila *PIB/loc* este: $VIF_1 = 1,767$.

Deoarece $VIF_1 = \frac{1}{(1-R_1^2)}$, rezultă că $R_1^2 = 0,434$.

Acest rezultat arată că 43,4% din variația variabilei independente *PIB/loc* este explicată liniar de variația celorlalte variabile independente, ceea ce nu conduce la apariția fenomenului de coliniaritate.

Problema 2

Rezultatele modelării econometrice pentru variabilele *PIB pe locuitor* (euro), *Rata de natalitate* (născuți la 1000 de locuitori), *Rata de mortalitate* (decedați la 1000 de locuitori) și *Gradul de urbanizare* (procentul persoanelor din mediul urban) sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	Collinearity Statistics	
		B	Std. Error	Beta			Tolerance	VIF
1	(Constant)	78,774	6,430		12,252	,000		
	PIB/locuitor	,001	,000	,383	4,357	,000	,566	1,767
	Rata de natalitate	-,503	,183	-,256	-2,743	,007	,501	1,995
	Rata de mortalitate	-1,837	,408	-,323	-4,504	,000	,851	1,175

a. Dependent Variable: Grad de urbanizare (%)

Sursa: *Prelucrat după baza de date World95 din SPSS*

Se cere:

a. să se testeze ipoteza de necoliniaritate a variabilelor independente, utilizând indicatorul *Tolerance*;

b. pentru variabila *Rata de mortalitate*, să se interpreteze valoarea indicatorului *TOL*.

Rezolvare

a. Testarea coliniarității

Demersul testării este următorul:

Formularea ipotezelor

H_0: variabilele independente sunt necoliniare;

H_1: variabilele independente sunt coliniare;

BCU IASI - CENTRU UNIVERSITAR LIBRARY

Alegerea testului

Testarea acestei ipoteze se realizează cu ajutorul indicatorului *TOL,* calculat pentru fiecare variabilă independentă după relația:

$TOL_j = 1 - R_j^2,\ j = \overline{1,3}$.

Regula de decizie

Dacă variabilele sunt coliniare, valoarea raportului de determinație dintre variabile este aproape de *1,* iar indicatorul *TOL* este aproape de zero. Dacă variabilele sunt necoliniare, indicatorul are valoarea 1. De regulă, indicatorul *TOL* are valori în intervalul *[0 , 1]*, iar ipoteza de necoliniaritate se respectă pentru valori cât mai apropiate de 1.

Interpretare

Conform datelor din tabelul de mai sus, valorile indicatorului *TOL* sunt de peste *0,5* ceea ce indică lipsa coliniarității dintre variabile.

b. Interpretare VIF pentru Rata de mortalitate

Valoarea *TOL* pentru variabila *Rata de mortalitate* este:

$TOL_3 = 0,851$.

Deoarece $TOL_3 = 1 - R_3^2$, rezultă că $R_3^2 = 0,149$. Acest rezultat arată că *14,9%* din variația variabilei independente *Rata de mortalitate* este explicată liniar de variația celorlalte variabile independente, ceea ce nu conduce la apariția fenomenului de coliniaritate.

5.2.2. Teste grilă

1. Într-un model de regresie liniară multiplă, dacă variabilele independente sunt perfect coliniare:
a) dispersia estimatorilor parametrilor este zero
b) dispersia estimatorilor parametrilor este infinită
c) erorile de modelare sunt minime

2. Pentru un model de regresie liniară multiplă, coliniaritatea este perfectă atunci când:
a) între variabilele independente, există o legătură liniară deterministă de forma: $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_p X_p = 0$

b) între variabilele independente, există o legătură liniară stochastică de forma: $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_p X_p + \varepsilon = 0$

c) între variabilele independente, nu există o legătură liniară

3. Pentru un model de regresie liniară multiplă, coliniaritatea este imperfectă, atunci când:

a) între variabilele independente, există o legătură liniară deterministă de forma: $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_p X_p = 0$

b) între variabilele independente, există o legătură liniară stochastică de forma: $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_p X_p + \varepsilon = 0$

c) între variabilele independente, nu există o legătură liniară

4. Dacă pentru un model de regresie liniară multiplă, indicatorul *Tolerance* ia valoarea *TOL = 1,* atunci variabilele independente sunt:

a) coliniare

b) necoliniare

c) dependente

5. Dacă pentru un model de regresie liniară multiplă indicatorul *VIF* ia o valoare mai mare decât *10,* atunci variabilele independente sunt:

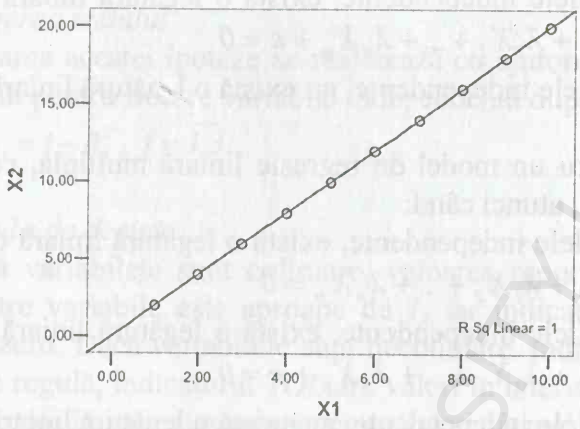
a) coliniare

b) necoliniare

c) independente

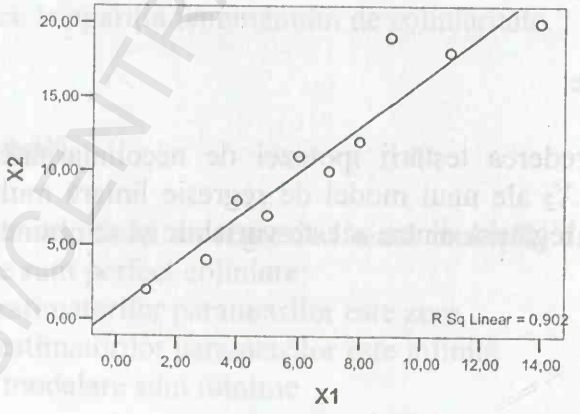
6. În vederea testării ipotezei de necoliniaritate dintre variabilele X_1 şi X_2 ale unui model de regresie liniară multiplă, se reprezintă grafic legătura dintre aceste variabile şi se obţine următoarea diagramă:

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



În această situație, se poate considera că:
a) există o coliniaritate perfectă între variabilele X_1 și X_2
b) există o coliniaritate imperfectă între variabilele X_1 și X_2
c) coeficientul de corelație liniară dintre variabilele independente este egal cu unu

7. În vederea testării ipotezei de necoliniaritate dintre variabilele X_1 și X_2 ale unui model de regresie liniară multiplă, se reprezintă grafic legătura dintre aceste variabile și se obține următoarea diagramă:



În această situație, se poate considera că:
a) există o coliniaritate perfectă între variabilele X_1 și X_2
b) există o coliniaritate imperfectă între variabilele X_1 și X_2

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) coeficientul de corelație liniară dintre variabilele independente este egal cu unu

8. În urma analizei legăturii dintre variabilele independente ale unui model de regresie, s-au obținut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients			Collinearity Statistics	
		B	Std. Error	Beta	t	Sig.	Tolerance	VIF
1	(Constant)	1,976	,761		2,597	,036		
	ani_scoala	,571	,106	,667	5,404	,001	,187	5,349
	varsta	,124	,044	,345	2,795	,027	,187	5,349

a. Dependent Variable: salariul

În această situație, se poate considera că:
a) ipoteza de necoliniaritate este respectată
b) între variabilele independente, există o legătură de tip parabolic
c) ipoteza de necoliniaritate este încălcată

9. În studiul legăturii dintre variabilele independente, X_i, ale unui model de regresie liniară multiplă, s-a obținut o valoare estimată a raportului de corelație multiplă dintre variabilele independente egală cu $R_j = 0,132$. Pentru acest rezultat, se poate considera că:
a) indicatorul $VIF=1,017$ arată că ipoteza de necoliniaritate este respectată
b) indicatorul $VIF=1,017$ arată că ipoteza de necoliniaritate este încălcată
c) între variabilele independente, nu există o legătură liniară puternică

10. În studiul legăturii dintre variabilele independente, X_i, ale unui model de regresie liniară multiplă, s-a obținut o valoare estimată a raportului de corelație multiplă dintre variabilele independente egală cu $R^2_j = 0,132$. Pentru acest rezultat, se poate considera că:
a) indicatorul $TOL=0,868$ arată că ipoteza de necoliniaritate este respectată
b) indicatorul $TOL=1,132$ arată că ipoteza de necoliniaritate este încălcată
c) între variabilele independente, nu există o legătură liniară puternică

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Răspunsuri la testele grilă

Număr test	Răspuns corect
1	b
2	a
3	b
4	b
5	a
6	a, c
7	b
8	a
9	a
10	a

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul 6

MODELAREA SERIILOR DE TIMP

1.	Componentele unei serii de timp
	Probleme rezolvate
	Teste grilă
2.	Metode elementare de ajustare a trendului
	Probleme rezolvate
	Teste grilă
3.	Metode analitice de ajustare a trendului
	Probleme rezolvate
	Teste grilă

În acest capitol, sunt prezentate probleme rezolvate şi teste grilă care privesc modelarea seriilor de timp.

BCU ASE UNIVERSITY LIBRARY

6.1. Componentele unei serii de timp

O serie de timp prezintă patru componente: componenta trend sau tendință (*T*), componenta sezonieră (*S*), componenta ciclică (*C*) și componenta aleatoare (*A*).

În studiul seriilor de timp deterministe, *analiza grafică* a seriilor de date poate furniza informații esențiale despre componentele acestora. *Componenta ciclică* este, de regulă, greu de identificat și de izolat în cadrul unei serii, motiv pentru care, de cele mai multe ori, se utilizează în analiza seriei de timp, *componenta trend* și *componenta ciclică,* împreună sub denumirea de *componentă extra-sezonieră.*

În acest subcapitol, vom prezenta câteva modalități de identificare pe cale grafică a componentelor unei serii de timp.

6.1.1. Probleme rezolvate

Problema 1

Evoluția *numărului lunar de pasageri ai liniilor internaționale din perioada ianuarie 1949 – decembrie 1960* este reprezentată grafic în figura de mai jos:

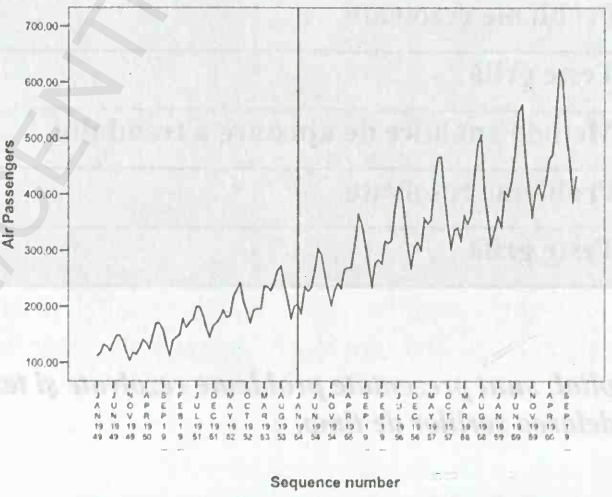


Figura 6.1. *Numărul lunar al pasagerilor din transportul aerian internațional în perioada 1949 – 1960*
Sursa: http://robjhyndman.com/TSDL/

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Se cere:

a. să se precizeze dacă seria prezintă *trend;*

b. în cazul în care considerați că seria prezintă trend, să se formuleze o ipoteză cu privire la forma acestuia;

c. să se precizeze dacă seria prezintă *componentă sezonieră;*

d. în cazul în care considerați că seria prezintă atât componentă trend, cât și componentă sezonieră, să se precizeze modul în care acestea se compun.

Rezolvare

a. Seria reprezentată grafic în Figura 6.1 prezintă un trend ascendent (crescător), datorită dezvoltării transportului aerian internațional în perioada 1949 – 1960.

b. Așa cum arată reprezentarea grafică de mai sus, forma trendului poate fi considerată *liniară* sau *exponențială.* Analizând din punct de vedere logic fenomenul, chiar dacă nu utilizăm încă metode econometrice de modelare, putem formula ipoteza că, cel mai probabil, evoluția numărului de pasageri transportați pe liniile aeriene internaționale are o evoluție *exponențială.*

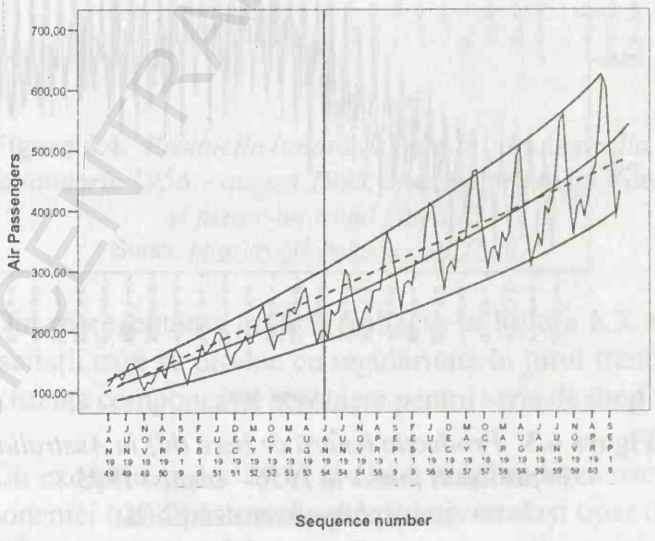


Figura 6.2. *Ajustarea seriei printr-un trend liniar și un trend exponențial*
Sursa: *http://robjhyndman.com/TSDL/*

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c. Deoarece există oscilații care se produc cu regularitate în jurul trendului, putem afirma că seria prezintă componentă sezonieră.

Observăm încă din acest stadiu al analizei că amplitudinea oscilațiilor înregistrate în jurul trendului crește pe măsură ce trendul este în creștere (*Figura 6.2).*

d. Deoarece oscilațiile se amplifică pe măsură ce trendul crește, putem afirma că cele două componente ale seriei de timp, componenta trend și componenta sezonieră, suportă o agregare de tip *multiplicativ.*

Observație. Până în ianuarie 1954, tiparul componentei sezoniere nu era foarte bine structurat. Din ianuarie 1954, se poate observa o mai bună structurare a tiparului componentei sezoniere.

Problema 2

Evoluția *Producției lunare de bere* (hl) *în Australia, în perioada ianuarie 1956 – august 1995,* este reprezentată în figura de mai jos:

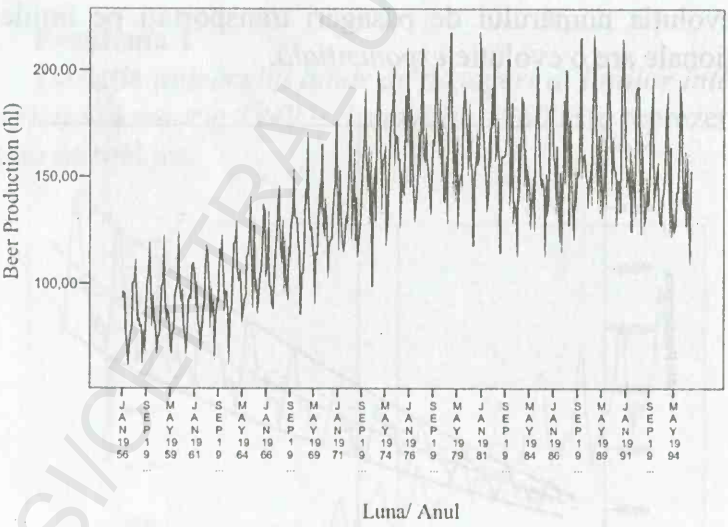


Figura 6.3. *Producția lunară de bere (hl) în Australia, în perioada ianuarie 1956 – august 1995*
Sursa: *http://robjhyndman.com/TSDL/*

Se cere să se precizeze:

a. dacă seria prezintă *trend;*

b. o ipoteză cu privire la forma trendului;

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c. dacă seria prezintă *componentă sezonieră;*

d. modul în care se compun trendul şi sezonalitatea, dacă seria admite ambele componente.

Rezolvare

a. Din analiza graficului din *Figura 6.3.* putem observa că seria prezintă un trend uşor neregulat.

b. Trendul seriei reprezentate grafic în figura de mai sus poate fi ajustat printr-o funcţie cubică sau pătratică.

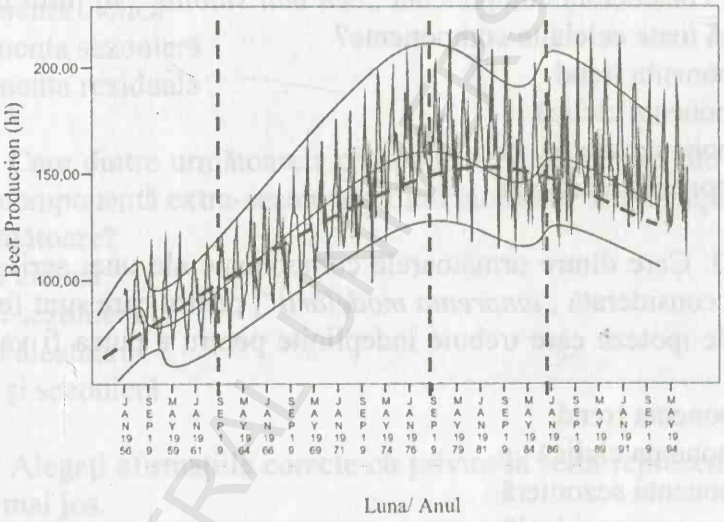


Figura 6.4. *Producţia lunară de bere (hl) în Australia, perioada ianuarie 1956 – august 1995, ajustată printr-un trend cubic şi printr-un trend pătratic*
Sursa: *http://robjhyndman.com/TSDL/*

c. Din reprezentarea grafică realizată în Figura 6.3, se observă că există oscilaţii care se produc cu regularitate în jurul trendului, ceea ce indică existenţa componentei sezoniere pentru seria de timp analizată.

d. Cu excepţia anilor *1956* şi *1964*, amplitudinea oscilaţiilor în jurul componentei trend păstrează aproximativ acelaşi tipar de la un an la altul, indiferent dacă trendul prezintă creşteri sau descreşteri. Această observaţie permite formularea ipotezei că pentru seria studiată, cele două componente admit o agregare *aditivă.*

6.1.2. Teste grilă

1. Componentele unei serii de timp sunt următoarele:
a) componenta trend
b) componenta ciclică
c) componenta sezonieră
d) componenta reziduală

2. Care dintre următoarele componente ale unei serii de timp poate fi considerată componenta *„cea mai stabilă"*, în jurul căreia se grupează toate celelalte componente?
a) componenta trend
b) componenta ciclică
c) componenta sezonieră
d) componenta reziduală

3. Care dintre următoarele componente ale unei serii de timp poate fi considerată *„amprenta modelării"*, pentru care sunt formulate un set de ipoteze care trebuie îndeplinite pentru a putea fi validat un model?
a) componenta trend
b) componenta ciclică
c) componenta sezonieră
d) componenta reziduală

4. Care dintre următoarele componente posedă un caracter oscilant regulat?
a) componenta trend
b) componenta ciclică
c) componenta sezonieră
d) componenta reziduală

5. Care dintre următoarele componente are o influență neutră asupra seriei pe parcursul unui an calendaristic?
a) componenta trend
b) componenta ciclică
c) componenta sezonieră
d) componenta reziduală

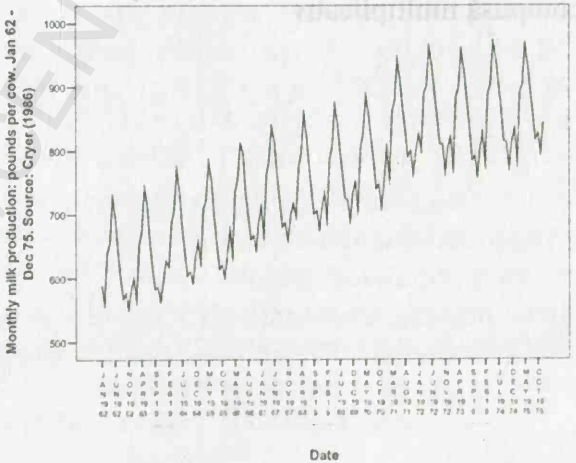
BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

6. Care dintre următoarele componente este cea mai greu de identificat în cadrul unei serii de timp?
a) componenta trend
b) componenta ciclică
c) componenta sezonieră
d) componenta reziduală

7. Care dintre următoarele componente are, de obicei, caracterul cel mai neregulat?
a) componenta trend
b) componenta ciclică
c) componenta sezonieră
d) componenta reziduală

8. Care dintre următoarele componente sunt reunite sub denumirea de componentă extra-sezonieră, fiind modelate ca o componentă de sine stătătoare?
a) trend şi ciclică
b) trend şi sezonieră
c) trend şi aleatoare
d) ciclică şi sezonieră

9. Alegeţi afirmaţiile corecte cu privire la seria reprezentată în figura de mai jos.

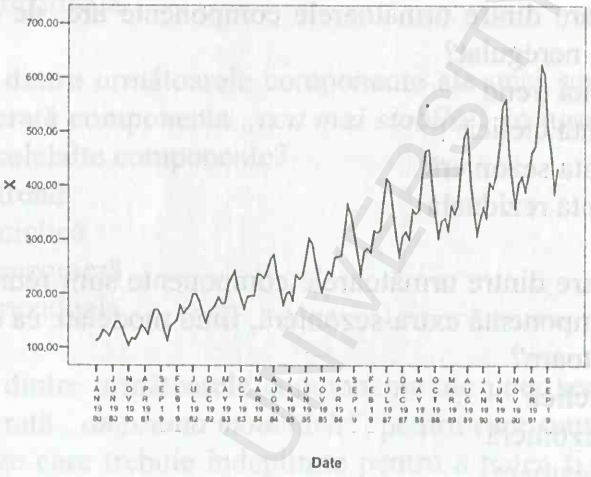


a) seria are trend crescător
b) seria are trend descrescător

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) seria are componentă sezonieră
d) seria nu are componentă sezonieră
e) seria este compusă aditiv
f) seria este compusă multiplicativ

10. Alegeți afirmațiile corecte cu privire la seria reprezentată în figura următoare.



a) seria are trend crescător
b) seria are trend descrescător
c) seria are componentă sezonieră
d) seria nu are componentă sezonieră
e) seria este compusă aditiv
f) seria este compusă multiplicativ

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Răspunsuri la testele grilă

Număr test	Răspunsuri corecte
1	a, b, c, d
2	a
3	d
4	b, c
5	c
6	b
7	d
8	a
9	a, c, e
10	a, c, f

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

6.2. Metode elementare de ajustare a trendului

Metoda sporului mediu şi *metoda ritmului mediu* sunt metode cunoscute sub denumirea de *metode elementare de ajustare a trendului*. Aceste metode sunt adaptate pentru seriile care prezintă un *trend liniar* şi un *trend exponenţial*.

Metoda sporului mediu are la bază ipoteza că evoluţia seriei se realizează după modelul unei progresii aritmetice. Rata progresiei este reprezentată de *sporul mediu* sau *media variaţiilor de la un moment de timp la altul* ale termenilor seriei. Evoluţiei în progresie aritmetică a unui fenomen îi corespunde *un trend liniar*.

Metoda ritmului mediu are la bază ipoteza că evoluţia seriei se realizează după modelul unei progresii geometrice. Rata progresiei este reprezentată de *rata medie* sau *media geometrică a ratelor de creştere de la un moment de timp la altul* ale termenilor seriei. Evoluţiei în progresie geometrică a unui fenomen îi corespunde un *trend exponenţial*.

Observaţie. Aceste metode de ajustare prezintă următoarele neajunsuri:

- pot fi utilizate cu succes doar pentru seriile care au o evoluţie liniară sau exponenţială;
- chiar dacă seriile urmează una din cele două tipuri de evoluţii, liniare sau exponenţiale, iar parametrii acestor modele prezintă variaţii mari în timp, metodele de ajustare nu mai pot fi utilizate cu succes.

Demersul ajustării trendului unei serii prin *metode elementare* presupune parcurgerea următoarelor etape:

1. Identificarea tipului de trend.
2. Alegerea metodei elementare de ajustare a trendului.
3. Determinarea parametrilor modelului de trend ales.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

6.2.1. Probleme rezolvate

Problema 1

Datele privind evoluția *Cifrei de afaceri a unei firme A, în perioada 1999 – 2008 (mii $),* sunt prezentate în tabelul 6.1.

Tabelul 6. 1. *Evoluția cifrei de afaceri a firmei A în perioada 1999 – 2008*

Anul	*Indexul perioadei (t)*	*CA a firmei A (mii $) (y)*
1999	1	45.00
2000	2	51.00
2001	3	54.00
2002	4	60.00
2003	5	63.00
2004	6	69.00
2005	7	74.00
2006	8	78.00
2007	9	82.00
2008	10	93.00

Sursa: *Date convenționale*

Se cere să se ajusteze trendul seriei cu ajutorul unei *metode elementare.*

Rezolvare

1. Identificarea tipului de trend și alegerea metodei de ajustare

Pe baza reprezentării grafice a seriei de timp, realizate în *Figura 6.5,* se poate observa că evoluția *Cifrei de afaceri a firmei A,* pentru perioada studiată, se apropie de *o progresie aritmetică,* seria prezentând *un trend liniar.*

2. Alegerea metodei elementare de ajustare a trendului

Deoarece seria prezintă un trend liniar, pentru ajustarea trendului, se poate utiliza *metoda sporului mediu.*

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

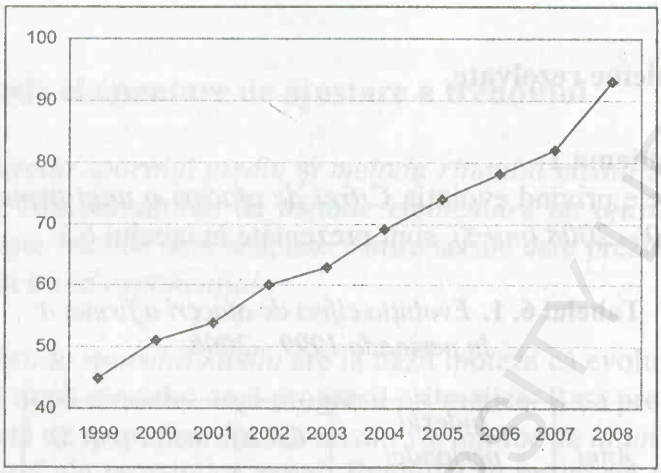


Figura 6.5. *Evoluţia cifrei de afaceri a firmei A, în perioada 1999 – 2008 (mii $)*
Sursa: *Prelucrat după datele din Tabelul 6.1*

Forma generală a modelului de trend, folosind metoda sporului mediu, este următoarea:

$y_t = y_0 + t \cdot \overline{\Delta}$, unde:

- y_0 este termenul de referinţă al seriei ($y_0 \cong \bar{y}$);
- $\overline{\Delta}$ este sporul mediu;
- t reprezintă variabila timp, valorile sale fiind numere întregi care au originea corespunzătoare termenului y_0.

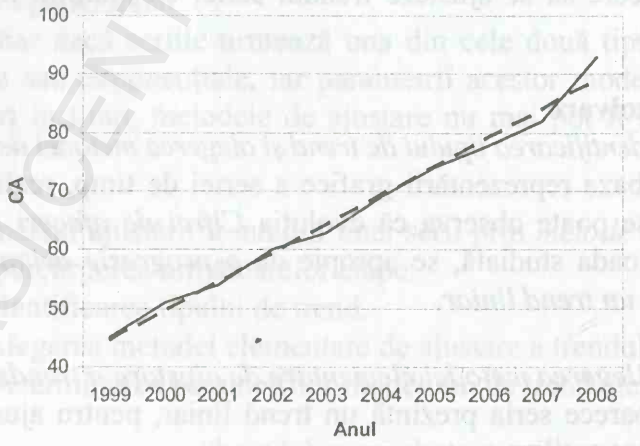


Figura 6.6. *Evoluţia cifrei de afaceri a firmei A în perioada 1999 – 2008 ajustată printr-un trend liniar*
Sursa: *Prelucrat după datele din Tabelul 6.1*

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3. Determinarea parametrilor modelului de trend

Parametrii modelului sunt: *ordonata la origine,* y_0, care este acel termen al seriei care are valoarea cea mai apropiată față de nivelul mediu al seriei și *sporul mediu,* $\bar{\Delta}$.

Pentru identificarea lui y_0, se calculează media seriei, conform relației:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{n=10} y_t}{10} = \frac{669}{10} = 66{,}9 .$$

Această valoare ne indică faptul că parametrul y_0 este cel mai bine aproximat de valoarea cifrei de afaceri (Y) din anul 1969, adică y_0=*69 mii $*. Pentru acest an, variabila t ia valoarea 0, conform datelor din tabelul 6.2.

Tabelul 6. 2. *Evoluția cifrei de afaceri a firmei A, în perioada 1999 – 2008*

Anul	*Indexul perioadei (t)*	*CA a firmei A (mii $) ($y_t$)*	*Sporul (mii $) ($\Delta_{t/t-1}$)*
1	2	3	4
1999	-5	45.00	-
2000	-4	51.00	6.00
2001	-3	54.00	3.00
2002	-2	60.00	6.00
2003	-1	63.00	3.00
2004	0	69.00	6.00
2005	1	74.00	5.00
2006	2	78.00	4.00
2007	3	82.00	4.00
2008	4	93.00	11.00
Suma	-	-	48

Sursa: *Date convenționale*

Pentru calculul *sporului mediu,* este necesară aflarea sporurilor individuale. Sporul mediu se calculează ca o medie aritmetică a sporurilor individuale.

Sporurile individuale sunt calculate ca diferențe de ordinul I a două valori succesive ale seriei, după relația:

$\Delta_{t/t-1} = y_t - y_{t-1}$.

Valorile sporurilor individuale, $\Delta_{t/t-1}$, sunt prezentate în *coloana 4* a tabelului 6.2.

BCU "CAROL I" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Sporul mediu se calculează pe baza relației:

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum_{t=2}^{n} \Delta_{/t-1}}{n-1} = \frac{(y_2 - y_1) + ... + (y_{i-1} - y_{i-2}) + ... + (y_n - y_{n-1})}{n-1} =$$

$$= \frac{6 + 3 + ... + 11}{9} = 5{,}33$$

sau $\bar{\Delta} = \frac{\Delta_{n/1}}{n-1} = \frac{y_n - y_1}{n-1} = \frac{93-45}{9} = \frac{48}{9} = 5{,}33$.

unde: y_n este ultimul termen al seriei, y_1 este primul termen al seriei, n este numărul de observații.

4. Interpretare

Modelul de trend estimat, folosind metoda sporului mediu, este: $y_t = 69 + 5{,}33 \cdot t$, unde:

$y_0 = 69$ *mii $* este cifra de afaceri a firmei *A* la momentul de referință, pentru $t=0$;

$\bar{\Delta} = 5{,}33$ *mii $* reprezintă creșterea medie anuală a cifrei de afaceri a firmei A, înregistrată în perioada 1999 – 2008.

Problema 2

Datele privind evoluția *Cifrei de afaceri a unei firme A, în perioada 1996 – 2007 (mii $)* sunt prezentate în *tabelul 6.3.*

Tabelul 6. 3. *Evoluția cifrei de afaceri a firmei A în perioada 1996 – 2007*

Anul	*Indexul perioadei (t)*	*CA a firmei A (mii $) ($y_t$)*
1996	1	43
1997	2	56
1998	3	67
1999	4	85
2000	5	100
2001	6	120
2002	7	165
2003	8	210
2004	9	280
2005	10	370
2006	11	490
2007	12	675

Sursa: *Date convenționale*

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Se cere să se ajusteze trendul corespunzător acestei serii cu ajutorul unei *metode elementare.*

Rezolvare

1. Identificarea tipului de trend şi alegerea metodei elementare de ajustare

Reprezentarea grafică a seriei prezentate în *Tabelul 6.3* este realizată în figura de mai jos:

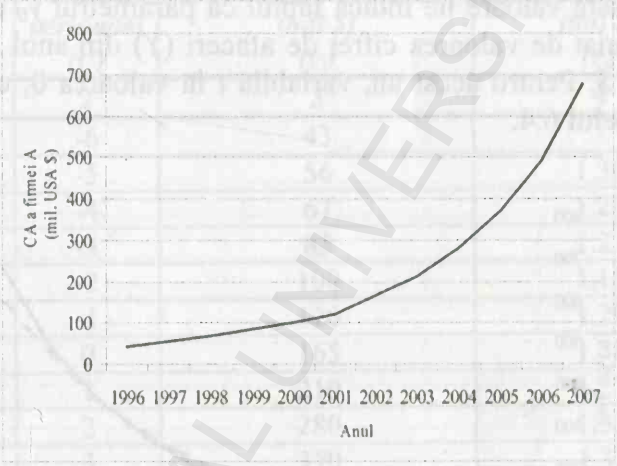


Figura 6.7. *Evoluţia cifrei de afaceri a firmei A în perioada 1996 – 2007*
Sursa: *Date convenţionale*

Pe baza reprezentării grafice a seriei de timp din *Figura 6.7* se poate considera că evoluţia cifrei de afaceri a firmei *A,* pentru perioada studiată, se apropie de *o progresie geometrică,* seria prezentând un *trend exponenţial.*

2. Alegerea metodei de ajustare elementare a trendului

Datorită formei trendului seriei date, este indicată alegerea *metodei ritmului mediu* ca metodă de ajustare a trendului. Forma modelului de trend, folosind metoda ritmului mediu, este:

$y_t = y_0 \cdot \overline{R}^t$, unde:

- y_0 este termenul de referinţă al seriei ($y_0 \cong \bar{y}$);
- $\overline{R}$ este *ritmul mediu*;
- t reprezintă variabila timp, valorile sale fiind numere întregi care au originea corespunzătoare termenului y_0.

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3. Determinarea parametrilor modelului

Parametrii modelului sunt: *ordonata la origine, y_0,* care este acel termen al seriei care are valoarea cea mai apropiată de nivelul mediu al seriei, $\bar{y}$, şi *ritmul mediu* al seriei, $\overline{R}$.

Pentru identificarea lui y_0, se calculează media geometrică a seriei, conform relaţiei:

$$\bar{y} = \sqrt[12]{\prod_{i=1}^{n} y_i} = \sqrt[12]{19538638793649 \cdot 10^{12}} = 155{,}2058.$$

Această valoare ne indică faptul că parametrul y_0 este cel mai bine aproximat de valoarea cifrei de afaceri (Y) din anul 2002, adică y_0=*165 mii $*. Pentru acest an, variabila t ia valoarea 0, conform datelor din tabelul 6.4.

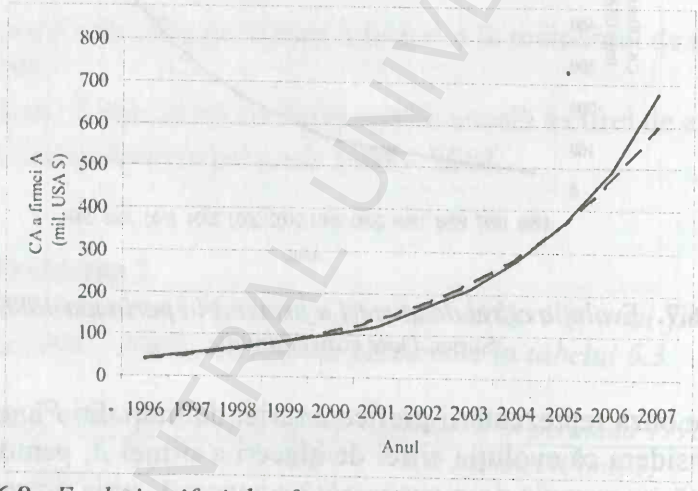


Figura 6.8. *Evoluţia cifrei de afaceri a firmei A în perioada 1996 – 2007, ajustată printr-un trend exponenţial*
Sursa: *Date convenţionale*

Pentru calcularea *ritmului mediu,* este necesară aflarea ritmurilor individuale. *Ritmul mediu* se calculează ca o medie geometrică a ritmurilor individuale.

Ritmurile individuale sunt calculate ca raport între două valori succesive ale seriei: $r_{t/t-1} = y_t / y_{t-1}$. Valorile ritmurilor individuale sunt prezentate în *coloana 3* a tabelului 6.4.

BCU "SCIENTIA" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ritmul mediu se calculează pe baza relației:

$$\overline{R} = \sqrt[n-1]{\prod_{t=2}^{n} r_{t/t-1}} = \sqrt[n-1]{\frac{y_2}{y_1}\frac{y_3}{y_4}\ldots\frac{y_i}{y_{i+1}}\ldots\frac{y_n}{y_{n-1}}} = \sqrt[11]{15,72} = 1,28$$

sau

$$\overline{R} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} = \sqrt[11]{\frac{675}{43}} = 1,28\,.$$

Tabelul 6. 4. *Evoluția cifrei de afaceri a firmei A în perioada 1996 – 2007*

Anul	*Indexul perioadei (t')*	*CA a firmei A (mii $) ($y_t$)*	*Ritmul individual (mii $) ($r_t$)*
1	2	3	4
1996	-6	43	-
1997	-5	56	1.30
1998	-4	67	1.20
1999	-3	85	1.27
2000	-2	100	1.18
2001	-1	120	1.20
2002	0	165	1.38
2003	1	210	1.27
2004	2	280	1.33
2005	3	370	1.32
2006	4	490	1.32
2007	5	675	1.38
$\prod_{t=2}^{n} r_{t/t-1}$	-	$19538638793649*10^{12}$	15.72364

Sursa: *Date convenționale*

4. Interpretare

Modelul de trend al seriei date, folosind metoda ritmului mediu, este:

$y_t = 165 \cdot 1,28^t$, unde:

$y_0 = 165$ *mii $* este cifra de afaceri a firmei *A* la momentul de referință pentru care *t=0* (anul 2002);

$\overline{R} = 1,28$ reprezintă *rata medie anuală de creștere* (*coeficient de multiplicare*) a cifrei de afaceri a firmei *A* pentru perioada 1996 – 2007.

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

6.2.2. Teste grilă

1. Atunci când termenii unei serii variază aproximativ după o progresie aritmetică, metoda elementară de ajustare care poate fi folosită în modelarea trendului este
a) metoda sporului mediu
b) metoda ritmului mediu
c) metoda trendului exponențial
d) metoda trendului parabolic

2. Atunci când termenii unei serii variază aproximativ după o progresie geometrică, metoda elementară de ajustare care poate fi folosită în modelarea trendului este
a) metoda sporului mediu
b) metoda ritmului mediu
c) metoda trendului exponențial
d) metoda trendului parabolic

3. Alegeți ecuația care este utilizată în ajustarea trendului prin metoda sporului mediu:
a) $y_t = y_0 + \overline{R}'$
b) $y_t = y_0 + t \cdot \overline{\Delta}$
c) $y_t = y_0 \cdot \overline{R}'$
d) $y_t = y_0 t \cdot \overline{\Delta}$

4. Alegeți ecuația care este utilizată în ajustarea trendului prin metoda ritmului mediu:
a) $y_t = y_0 + \overline{R}'$
b) $y_t = y_0 + t \cdot \overline{\Delta}$
c) $y_t = y_0 \cdot \overline{R}'$
d) $y_t = y_0 t \cdot \overline{\Delta}$

5. Metoda sporului mediu este utilizată în ajustarea unei serii care prezintă un trend:
a) liniar

BCU "CAROL I" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) exponențial
c) putere
d) invers

6. Metoda ritmului mediu este utilizată în ajustarea unei serii care prezintă un trend:
a) liniar
b) exponențial
c) putere
d) invers

7. Pentru un fenomen economic, *Y*, observat pentru perioada 1990 – 2008, s-a obținut, folosind metoda sporului mediu, un model de trend de forma: $y_t = 2{,}1 + 1{,}6 \cdot t$. Pentru exemplul dat, se poate considera că:
a) fenomenul observat a cunoscut, în perioada 1990 – 2008, o evoluție cu un trend crescător
b) fenomenul observat a cunoscut, în perioada 1990 – 2008, o evoluție cu un trend descrescător
c) nivelul fenomenului observat a crescut, în medie, cu *1,6 u.m./an*, în perioada 1990 – 2008
d) nivelul fenomenului observat a crescut, în medie, cu *2,1 u.m./an*, în perioada 1990 – 2008

8. Pentru un fenomen economic, *Y*, observat pentru perioada 1990 – 2008, s-a obținut, folosind metoda sporului mediu, un model de trend de forma: $y_t = 2 - 0{,}8 \cdot t$. Pentru exemplul dat, se poate considera că:
a) fenomenul observat a cunoscut, în perioada 1990 – 2008, o evoluție cu un trend crescător
b) fenomenul observat a cunoscut, în perioada 1990 – 2008, o evoluție cu un trend descrescător
c) nivelul fenomenului observat a crescut, în medie, cu *2 u.m./an*, în perioada 1990 – 2008
d) nivelul fenomenului observat s-a redus, în medie, cu *0,8 u.m./an*, în perioada 1990 – 2008

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

9. Pentru un fenomen economic, *Y*, observat pentru perioada 1990 – 2008, s-a obținut, folosind metoda ritmului mediu, un model de trend de forma: $y_t = 2 \cdot 1{,}6^t$. Pentru exemplul dat, se poate considera că:
a) nivelul fenomenului *Y* a crescut în medie, în perioada 1990 – 2008, de 1,6 ori pe an
b) nivelul fenomenului *Y* a crescut în medie, în perioada 1990 – 2008, cu 1,6% pe an
c) nivelul fenomenului *Y* a crescut în medie, în perioada 1990 – 2008, cu 60% pe an
d) nivelul fenomenului *Y* a crescut în medie, în perioada 1990 – 2008, de 2 ori pe an

10. Pentru un fenomen economic, *Y*, observat pentru perioada 1990 – 2008, s-a obținut, folosind metoda ritmului mediu, un model de trend de forma: $y_t = 2 \cdot 0{,}7^t$. Pentru exemplul dat, se poate considera că:
a) nivelul fenomenului *Y* a crescut în medie, în perioada 1990 – 2008, de 2 ori pe an
b) nivelul fenomenului *Y* s-a redus în medie, în perioada 1990 – 2008, cu 30% pe an
c) nivelul fenomenului *Y* s-a redus în medie, în perioada 1990 – 2008, cu 70% pe an
d) nivelul fenomenului *Y* a crescut în medie, în perioada 1990 – 2008, de 2% pe an

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Răspunsuri la testele grilă

Număr test	Răspuns corect
1	a
2	b
3	b
4	c
5	a
6	b
7	a, c
8	b, d
9	a, c
10	b

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

6.3. Metode analitice de ajustare a trendului

Metoda analitică de ajustare a trendului presupune parcurgerea etapelor:

1. Identificarea tipului de trend şi alegerea tipului de model utilizat pentru ajustarea analitică a seriei.
2. Estimarea şi testarea parametrilor modelului de trend.
3. Estimarea şi testarea indicatorilor de corelaţie.
4. Validarea celui mai bun model pe baza erorilor de modelare. Această etapă se aplică în cazul estimării mai multor modele de trend.

6.3.1. Probleme rezolvate

Problema 1

Datele privind evoluţia *Cifrei de afaceri a firmei A, în perioada 1999 – 2008 (mii $)* sunt prezentate în tabelul 6.5.

Tabelul 6. 5. *Evoluţia cifrei de afaceri a firmei A în perioada 1999 – 2008*

Anul	*Indexul perioadei (t)*	*CA a firmei A (mii $) ($y_t$)*
1999	1	45.00
2000	2	51.00
2001	3	54.00
2002	4	60.00
2003	5	63.00
2004	6	69.00
2005	7	74.00
2006	8	78.00
2007	9	82.00
2008	10	93.00

Sursa: *Date convenţionale*

Se cere să se ajusteze trendul corespunzător acestei serii cu ajutorul unei *metode analitice.*

Rezolvare

1. Identificarea tipului de trend şi alegerea tipului de model de trend

Reprezentarea grafică a seriei prezentate în Tabelul 6.5 este realizată în figura de mai jos:

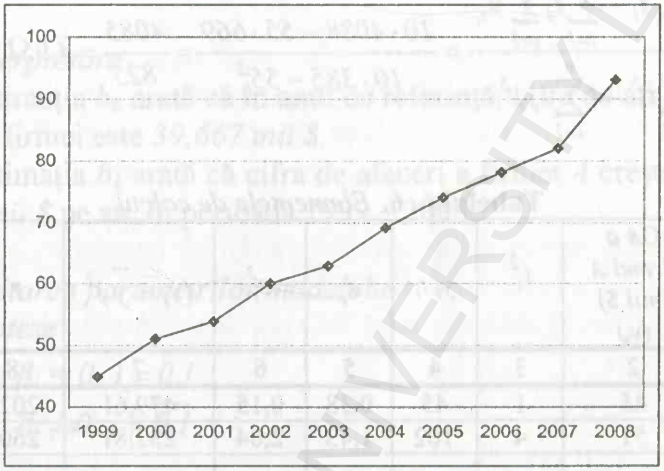


Figura 6.9. *Evoluţia cifrei de afaceri a firmei A în perioada 1999 – 2008*
Sursa: *Date convenţionale*

Diagrama din *Figura 6.9* arată că seria dată poate fi ajustată printr-un model de trend liniar. Forma generală a modelului de trend liniar este:

$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$, unde β_0 şi β_1 sunt parametrii modelului.

2. Estimarea şi testarea parametrilor modelului de trend

Estimarea parametrilor modelului

Prin metoda celor mai mici pătrate, se obţin următoarele estimaţii ale parametrilor modelului (tabelul 6.6):

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{t_i} \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} y_{t_i} t_i}{n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} t_i)^2} = \frac{669 \cdot 385 - 55 \cdot 4088}{10 \cdot 385 - 55^2} = \frac{32725}{825} = 39,667$$

$$b_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} y_{t_i} t_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} y_{t_i}}{n\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} t_i)^2} = \frac{10 \cdot 4088 - 55 \cdot 669}{10 \cdot 385 - 55^2} = \frac{4085}{825} = 4,9515$$

Tabelul 6. 6. *Elementele de calcul*

Indexul perioadei (t_i)	*CA a firmei A (mii $)* ($y_t$)	t_i^2	$y_t t_i$	e_t	e_t^2	$(y_t - \bar{y})^2$	y^2	$(t_i - \bar{t})^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	45	1	45	0,38	0,15	479,61	2025	20,25
2	51	4	102	1,43	2,04	252,81	2601	12,25
3	54	9	162	-0,52	0,27	166,41	2916	6,25
4	60	16	240	0,52	0,28	47,61	3600	2,25
5	63	25	315	-1,43	2,04	15,21	3969	0,25
6	69	36	414	-0,38	0,14	4,41	4761	0,25
7	74	49	518	-0,33	0,11	50,41	5476	2,25
8	78	64	624	-1,28	1,65	123,21	6084	6,25
9	82	81	738	-2,24	5,00	228,01	6724	12,25
10	93	100	930	3,81	14,54	681,21	8649	20,25
55	669	385	4088		26,21	2048,90	46805	82,50

Sursa: *Prelucrat după date convenţionale*

Prin urmare, modelul de trend liniar estimat este de forma:

$y_t = 39,667 + 4,9515t$

Rezultatele estimării şi testării parametrilor modelului, obţinute cu ajutorul programului SPSS, sunt prezentate în tabelul alăturat.

BCU ASE BUCHAREST UNIVERSITY LIBRARY

Coefficients

	Unstand. Coeff.		Stand. Coeff.	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
Case Sequence	4,951	,199	,994	24,849	,000
(Constant)	39,667	1,236		32,082	,000

Sursa: *Prelucrat în SPSS după date convenționale*

Interpretare

Estimația b_0 arată că în anul de referință, cifra de afaceri medie estimată a firmei este *39,667 mii $*.

Estimația b_1 arată că cifra de afaceri a firmei *A* crește în medie cu *4,951 mii $* pe an, în perioada 1999 – 2008.

Testarea parametrilor modelului

Ipoteze

H_0: $\beta_i = 0,\ i = \overline{0,1}$

H_1: $\beta_i \neq 0,\ i = \overline{0,1}$

Alegerea pragului de semnificație

α=0,05.

Alegerea statisticii test

Pentru testarea parametrilor modelelor de trend, este utilizat *testul Student:*

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}, i = \overline{0,1}.$$

Valoarea teoretică a statisticii

Pentru un prag de semnificație $\alpha = 0,05$ și pentru $n\text{-}k = 10\text{-}2$ *grade de libertate,* se alege $t_{teoretic} = t_{\alpha/2;\, n-k} = t_{0,025;\, 8} = 2,306$.

Valoarea calculată a statisticii

Pentru β_0: $t_{calc} = \frac{b_0}{s_{\hat{\beta}_0}} = \frac{39,667}{1,236} = 32,09$.

Pentru β_1: $t_{calc} = \frac{b_1}{s_{\hat{\beta}_1}} = \frac{4,9515}{0,199} = 24,8$.

Regula de decizie

Dacă $|t_{calc}| \leq t_{a/2;\ n-k}$, se acceptă H_0, deci parametrul nu diferă semnificativ de zero.

Dacă $|t_{calc}| > t_{a/2;\ n-k}$, se respinge H_0, deci parametrul diferă semnificativ de zero, cu o probabilitate de 0,95.

Interpretare

Atât în cazul parametrului β_0, cât și în cazul parametrului β_1, $t_{calc} > t_{teoretic}$. Aceasta arată că se respinge ipoteza H_0 cu o probabilitate de 95%, adică parametrii modelului de trend sunt semnificativ diferiți de zero.

3. Estimarea și testarea indicatorilor de corelație

Estimarea raportului de determinație

Raportul de determinație se calculează pe baza relației prezentate mai jos.

$$R^2 = \frac{b_0\sum_{t=1}^{n} y_t + b_1\sum_{t=1}^{n} t \cdot y_t - \frac{1}{n}(\sum_{t=1}^{n} y_t)^2}{\sum_{t=1}^{n} y_t^2 - \frac{1}{n}(\sum_{t=1}^{n} y_t)^2} = \frac{39{,}667 \cdot 669 + 4{,}9515 \cdot 4088 - \frac{1}{10} \cdot 669^2}{46805 - \frac{1}{10} \cdot 669^2} =$$

$$= \frac{26537{,}223 + 20241{,}73 - 44756{,}1}{46805 - 44756{,}1} = \frac{2022{,}853}{2048{,}9} = 0{,}9872$$

Interpretare

Un raport de determinație de 0,9872 indică faptul că 98,72% din variația *cifrei de afaceri* este datorată variației variabilei *t*, pe baza modelului liniar.

Un alt indicator al corelației este *raportul de determinație ajustat* (*Adjusted R Square*), care se calculează după relația:

$$\overline{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k} = 1 - (1 - 0{,}9872)\frac{9}{8} = 1 - 0{,}0128 \cdot 1{,}125 =$$

$$= 1 - 0{,}0144 \cong 0{,}986.$$

Rezultatele estimării raportului de determinație obținute cu ajutorul programului SPSS sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Coefficients

Model Summary

R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
,994	,9872	,986	1,810

Sursa: *Prelucrat în SPSS după date convenţionale*

Testarea raportului de determinaţie

Formularea ipotezelor

H_0: $\eta^2 = 0$.

H_1: $\eta^2 > 0$.

Alegerea statisticii test

Pentru testarea parametrului *raportul de determinaţie,* este utilizat *testul F*: $F = \frac{\hat{\eta}^2}{1-\hat{\eta}^2}\frac{n-k}{k-1}$.

Alegerea pragului de semnificaţie

$\alpha=0,05$.

Valoarea teoretică a statisticii

Pentru un prag de semnificaţie $\alpha=0,05$ şi pentru $k-1=1$ şi $n-k=10-2=8$ grade de libertate, $F_{\alpha,\, k-1,\, n-k} = F_{0,05;\, 1\, ;8} = 5,318$.

Valoarea calculată a statisticii

Valoarea calculată a statisticii F se obţine, utilizând relaţiile:

$$F_{calc} = \frac{ESS}{RSS}\frac{n-k}{k-1} = \frac{MSE}{MSR} \text{ sau } F_{calc} = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-k}{n-1}.$$

$$F_{calc} = \frac{ESS}{RSS}\frac{n-k}{k-1} = \frac{2022,694}{26,206}\frac{8}{1} = 617,474$$

respectiv,

$$F_{calc} = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-k}{n-1} = \frac{0,9872}{1-0,9872}\frac{8}{1} = \frac{7,8976}{0,0128} = 617,474.$$

Rezultatele testării raportului de determinaţie obţinute cu ajutorul programului SPSS sunt prezentate în tabelul alăturat.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Regression	2022,694	1	2022,694	617,474	,000
Residual	26,206	8	3,276		
Total	2048,900	9			

Sursa: *Prelucrat în SPSS după date convenționale*

Regula de decizie

În urma comparării valorii teoretice cu valoarea calculată a statisticii test, pot rezulta următoarele situații:

- dacă $F_{calc} \leq F_{\alpha,\ k-1,\ n-k}$, se acceptă H_0, adică parametrul nu diferă semnificativ de zero;
- dacă $F_{calc} > F_{\alpha,\ k-1,\ n-k}$, se respinge H_0, deci parametrul este semnificativ mai mare decât zero, cu o probabilitate de $(1-\alpha)$.

Interpretare

Deoarece $F_{calc} = 617,474 > F_{\alpha,\ k-1,\ n-k} = 5,318$, se respinge H_0 cu o probabilitate de 0,95. Prin urmare, parametrul *raportul de determinație* este semnificativ mai mare decât zero.

Problema 2

Evoluția *Cifrei de afaceri a firmei A, în perioada 1996 – 2007*, este prezentată în tabelul de mai jos:

Tabelul 6. 7. *Cifra de afaceri a firmei A, în perioada 1996 – 2007*

Anul	*CA a firmei B (mii $) ($y_i$)*
1996	43
1997	56
1998	67
1999	85
2000	100
2001	120
2002	165
2003	210
2004	280
2005	370
2006	490
2007	675
78	2661

Sursa: *Date convenționale*

BCU IASI/CEIFR UNIVERSITY LIBRARY

Se cere să se ajusteze modelul de trend corespunzător cifrei de afaceri a firmei *A* din perioada 1996 – 2007, cu ajutorul *unei metode analitice de ajustare a trendului.*

Rezolvare

1. Identificarea tipului de trend şi alegerea modelului de trend

Reprezentarea grafică a seriei prezentate în Tabelul 6.7 este realizată în figura de mai jos:

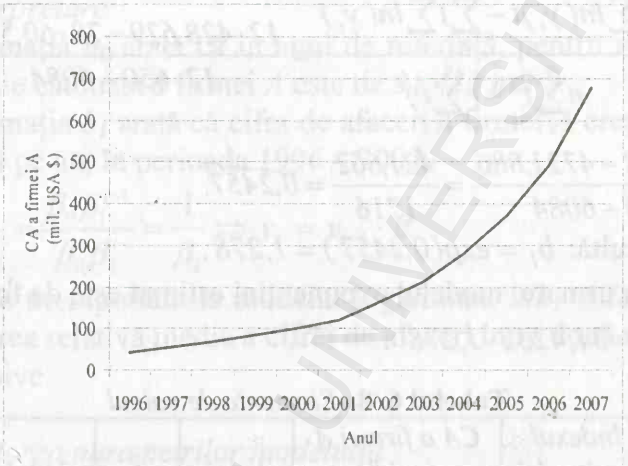


Figura 6.10.*Evoluţia cifrei de afaceri a firmei A în perioada 1996 – 2007*
Sursa: *Date convenţionale*

Pe baza diagramei din *Figura 6.10,* putem afirma că trendul seriei de timp este de tip exponenţial. Ecuaţia acestui model este $y_t = \beta_0 \beta_1^t e^{\varepsilon_t}$.

2. Estimarea şi testarea parametrilor modelului

Estimarea parametrilor modelului

Modelul exponenţial descris prin ecuaţia de mai sus poate fi liniarizat prin logaritmare astfel:

$ln(y_t) = ln(\beta_0)+t \cdot ln(\beta_1)+\varepsilon_t$, unde $ln(\beta_0)$ şi $ln(\beta_1)$ reprezintă parametrii noului model liniarizat.

Pentru calculul estimaţiilor, prin metoda celor mai mici pătrate, se utilizează datele din tabelul 6.8.

BCU "LUCIAN BLAGA" UNIVERSITY LIBRARY

$$ln(b_0) = \frac{\sum_1^n ln(y_t)\sum_1^n t^2 - \sum_1^n t\sum_1^n ln(y_t)t}{n\sum_1^n t^2 - (\sum_1^n t)^2} = \frac{60,537 \cdot 650 - 78 \cdot 428,629}{12 \cdot 650 - 6084} =$$

$$= \frac{39349,05 - 33433,062}{7800 - 6084} = \frac{5915,988}{1716} = 3,4475.$$

Rezultă: $b_0 = exp(3,4475) = 31,4232$.

$$ln(b_1) = \frac{n\sum_1^n ln(y_t)t - \sum_1^n t\sum_1^n ln(y_t)}{n\sum_1^n t^2 - (\sum_1^n t)^2} = \frac{12 \cdot 428,629 - 78 \cdot 60,537}{12 \cdot 650 - 6084} =$$

$$= \frac{5143,548 - 4721,886}{7800 - 6084} = \frac{421,662}{1716} = 0,2457.$$

Rezultă: $b_1 = exp(0,2457) = 1,278$.

Prin urmare, modelul exponențial estimat este de forma:

$y_t = 31,4232 \cdot 1,278^t$.

Tabelul 6. 8. *Elemente de calcul*

Indexul perioadei (t)	*CA a firmei A (mii $) ($y_t$)*	*$ln(y_t)$*	*t^2*	*$ln(y_t)\ t$*
1	2	3	4	5
1	43	3,761	1	3,76
2	56	4,025	4	8,05
3	67	4,205	9	12,61
4	85	4,443	16	17,77
5	100	4,605	25	23,03
6	120	4,787	36	28,72
7	165	5,106	49	35,74
8	210	5,347	64	42,78
9	280	5,635	81	50,71
10	370	5,914	100	59,14
11	490	6,194	121	68,14
12	675	6,515	144	78,18
78	2661	60,537	650	428,629

Sursa: *Date convenționale*

În tabelul de mai jos, sunt prezentate estimațiile parametrilor modelului obținute cu ajutorul SPSS.

BCU IAȘI CENTRE UNIVERSITY LIBRARY

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
Case Sequence	1,279	,008	2,709	153,688	,000
(Constant)	31,423	1,505		20,882	,000

The dependent variable is ln(CA).

Sursa: *Prelucrat în SPSS după date convenționale*

Interpretare

Estimația b_0 arată că în anul de referință, pentru $t=0$, cifra de afaceri medie estimată a firmei *A* este de *31,423 mii $*.

Estimația b_1 arată că cifra de afaceri a firmei *A* crește în medie de 1,278 ori pe an, în perioada 1996 – 2007.

$$\frac{y_{t-1}}{y_t} = \frac{\beta_0 \beta_1^{t-1}}{\beta_0 \beta_1^t} = \frac{1}{\beta_1} \Rightarrow y_t = y_{t-1} \cdot \beta_1$$

Dacă ne raportăm la modelul logaritmat, $lnb_1 = 0,2457$ reprezintă creșterea relativă medie a cifrei de afaceri între două momente de timp succesive.

Testarea parametrilor modelului

Ipoteze

H_0: $\beta_i = 0,\ i = \overline{0,1}$.

H_1: $\beta_i \neq 0,\ i = \overline{0,1}$.

Alegerea pragului de semnificație

$\alpha=0,05$.

Alegerea statisticii test

Pentru testarea parametrilor modelelor de regresie, este utilizat *testul Student*: $t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}, i = \overline{0,1}$.

Valoarea teoretică a statisticii

Pentru un prag de semnificație $\alpha = 0,05$ și pentru $n-k = 12-2$ grade de libertate, $t_{teoretic} = t_{\alpha/2;\ n-k} = t_{0,025;\ 10} = 2,228$.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Valoarea calculată a statisticii

Pentru β_0: $t_{calc} = \frac{b_0}{s_{\hat{\beta}_0}} = \frac{31,423}{1,505} = 20,88$.

Pentru β_1: $t_{calc} = \frac{b_1}{s_{\hat{\beta}_1}} = \frac{1,279}{0,008} = 153,688$.

Regula de decizie

Dacă $|t_{calc}| \leq t_{\alpha/2;\ n-k}$, se acceptă H_0, deci parametrul nu diferă semnificativ de zero.

Dacă $|t_{calc}| > t_{\alpha/2;\ n-k}$, se respinge H_0, deci parametrul diferă semnificativ de zero.

Interpretare

Atât în cazul parametrului β_0, cât şi în cazul parametrului β_1, $|t_{calc}| > t_{\alpha/2;\ n-k}$, adică se respinge H_0 cu o probabilitate de 95%. Prin urmare, parametrii modelului de trend sunt semnificativ diferiţi de zero.

3. Estimarea şi testarea indicatorilor de corelaţie

Estimarea raportului de determinaţie

Valoarea estimată a raportului de determinaţie este prezentată în tabelul de mai jos:

Coefficients

Model Summary

R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
,997	,993	,992	,078

Sursa: *Prelucrat în SPSS după date convenţionale*

Raportul de determinaţie, $R^2 = 0,993$, indică faptul că 99,3% din variaţia lui Y este datorată variaţiei variabilei t pe baza modelului exponenţial.

Raportul de determinaţie ajustat (*Adjusted R Square*) se calculează după relaţia:

$$\overline{R}^2 = 1-(1-R^2)\frac{n-1}{n-k} = 1-(1-0,993)\frac{11}{10} = 1-0,0697 \cdot 0,11 =$$

$$= 1-0,0077 = 0,9923.$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Testarea raportului de determinație
Formularea ipotezelor
H_0: $\eta^2 = 0$.
H_1: $\eta^2 > 0$.

Alegerea pragului de semnificație
$\alpha=0,05$.

Alegerea statisticii test
Pentru testarea parametrului *raportul de determinație*, este utilizat *testul F*: $F = \frac{\hat{\eta}^2}{1-\hat{\eta}^2}\frac{n-k}{k-1}$.

Valoarea teoretică a statisticii F
Pentru un prag de semnificație $\alpha=0,05$ și pentru $k-1=1$ și $n-k=12-2=10$ grade de libertate, $F_{\alpha, k-1, n-k} = F_{0,05; 1; 10} = 4,965$.

Valoarea calculată a statisticii
Valoarea calculată a statisticii F se poate obține astfel:

$$F_{calc} = \frac{ESS}{RSS}\frac{n-k}{k-1} = \frac{MSE}{MSR} \text{ sau } F_{calc} = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-k}{n-1}.$$

Rezultatele testării raportului de determinație obținute cu ajutorul programului SPSS sunt prezentate în tabelul de mai jos.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Regression	8,6343	1	8,634	1426,165	,000
Residual	,06054	10	,006		
Total	8,695	11			

Sursa: *Prelucrat în SPSS după date convenționale*

Utilizând datele din tabelul de mai sus, se obține:

$$F_{calc} = \frac{ESS}{RSS}\frac{n-k}{k-1} = \frac{8,6343}{0,06054}\frac{10}{1} = 1426,165$$

BCU ACENTRU UNIVERSITY LIBRARY

Regula de decizie

În urma comparării valorii teoretice cu valoarea calculată, pot rezulta următoarele situații:

- dacă $F_{calc} \leq F_{\alpha,\ k-1,\ n-k}$, se acceptă H_0, deci parametrul nu diferă semnificativ de zero;
- dacă $F_{calc} > F_{\alpha,\ k-1,\ n-k}$, se respinge H_0, deci parametrul este semnificativ mai mare decât zero, cu o probabilitate de 0,95.

Interpretare

Deoarece $F_{calc} > F_{\alpha,\ k-1,\ n-k,}$ se respinge H_0. Prin urmare, cu o probabilitate de 0,95, parametrul *raportul de determinație* este semnificativ mai mare decât zero.

6.3.2. Teste grilă

1. Forma generală a modelului de trend liniar este:

a) $y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \varepsilon$

b) $y_t = \beta_0 \cdot \beta_1^t \cdot e^{\varepsilon_t}$

c) $y_t = y_0 \cdot \overline{R}^t$

d) $y_t = \beta_0 \cdot \beta_1 \cdot t + \varepsilon$

2. Forma generală a modelului de trend exponențial este:

a) $y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \varepsilon$

b) $y_t = \beta_0 \cdot \beta_1^t \cdot e^{\varepsilon_t}$

c) $y_t = y_0 \cdot \overline{R}^t$

d) $y_t = \beta_0 \cdot \beta_1 \cdot t + \varepsilon$

3. În ajustarea unui fenomen, *Y,* observat pentru o perioadă de 10 ani, se folosește un model de trend de forma: $y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \varepsilon$.

Pentru exemplul dat, o valoare pozitivă a parametrului β_1 arată că:

a) fenomenul observat a cunoscut, în perioada dată, o evoluție cu un trend crescător

BCU ASE CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) fenomenul observat a cunoscut, în perioada dată, o evoluție cu un trend descrescător
c) fenomenul observat a cunoscut, în perioada dată, o evoluție cu un trend exponențial

4. În ajustarea unui fenomen, *Y*, observat pentru o perioadă de 10 ani se folosește un model de trend de forma: $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon$.

Pentru exemplul dat, o valoare negativă a parametrului β_1 arată că:
a) fenomenul observat a cunoscut în perioada dată o evoluție cu un trend crescător
b) fenomenul observat a cunoscut în perioada dată o evoluție cu un trend descrescător
c) fenomenul observat a cunoscut în perioada dată o evoluție cu un trend exponențial

5. În ajustarea unui fenomen, *Y*, observat pentru o perioadă de 10 ani, se folosește un model de trend de forma: $y_t = \beta_0 \cdot \beta_1^t \cdot e^{\varepsilon_t}$.

Pentru exemplul dat, o valoare supraunitară a parametrului β_1 arată că:
a) fenomenul observat a cunoscut în perioada dată o evoluție cu un trend crescător
b) fenomenul observat a cunoscut în perioada dată o evoluție cu un trend descrescător
c) fenomenul observat a cunoscut în perioada dată o evoluție cu un trend exponențial

6. În ajustarea unui fenomen, *Y*, observat pentru o perioadă de 10 ani, se folosește un model de trend de forma: $y_t = \beta_0 \cdot \beta_1^t \cdot e^{\varepsilon_t}$.

Pentru exemplul dat, o valoare subunitară a parametrului β_1 arată că:
a) fenomenul observat a cunoscut în perioada dată o evoluție cu un trend crescător
b) fenomenul observat a cunoscut în perioada dată o evoluție cu un trend descrescător
c) fenomenul observat a cunoscut în perioada dată o evoluție cu un trend liniar

BCU "LUCIAN BLAGA" UNIVERSITY LIBRARY

7. Pentru o serie de timp, se emit două ipoteze cu privire la forma trendului. Una dintre ipoteze susține că seria de timp a evoluat după un trend exponențial, iar cealaltă ipoteză susține că seria de timp a evoluat după un trend parabolic. În urma prelucrării datelor, s-au obținut următoarele rezultate:

MODELUL PARABOLIC

Model Summary

R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
,992	,983	,980	28,366

ANOVA

	Mean Square	F	Sig.
Regression	213065,381	264,806	,000
Residual	804,610		
Total			

Coefficients

	Unstd. Coeff. B	t	Sig.
Case Sequence	-42,129	-4,063	,003
Case Sequence**2	7,095	9,137	,000
(Constant)	111,295	3,796	,004

MODELUL EXPONENȚIAL

Model Summary

R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
,997	,993	,992	,078

ANOVA

	Mean Square	F	Sig.
Regression	8,634	1426,165	,000
Residual	,006		
Total			

Coefficients

	Unstd. Coeff. B	t	Sig.
Case Sequence	1,279	153,688	,000
(Constant)	31,423	20,882	,000

The dependent variable is ln(CA).

Pentru exemplul dat, se poate decide:

a) alegerea modelul parabolic
b) alegerea modelului exponențial
c) că nici un model nu este semnificativ
d) că oricare dintre cele două modele este semnificativ

8. Pentru o serie de timp, se emit două ipoteze cu privire la forma trendului. Una dintre ipoteze susține că seria de timp a evoluat după un trend cubic, iar cealaltă ipoteză susține că seria de timp a evoluat după un trend parabolic. Rezultatele prelucrării datelor, obținute cu ajutorul SPSS, sunt prezentate în tabelele următoare:

BCU "Ovidius" Constanța LIBRARY

MODELUL PARABOLIC

Model Summary

R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
,992	,983	,980	28,366

ANOVA

	Mean Square	F	Sig.
Regression	213065,381	264,806	,000
Residual	804,610		
Total			

Coefficients

	Unstd. Coeff. B	T	Sig.
Case Sequence	-42,129	-4,063	,003
Case Sequence**2	7,095	9,137	,000
(Constant)	111,295	3,796	,004

MODELUL CUBIC

Model Summary

R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
,999	,999	,999	7,537

ANOVA

	Mean Square	F	Sig.
Regression	144305,949	2540,588	,000
Residual	56,800		
Total			

Coefficients

	Unstd. Coeff. B	t	Sig.
Case Sequence	38,629	4,899	,001
Case Sequence ** 2	-7,832	-5,671	,000
Case Sequence ** 3	,765	10,931	,000
(Constant)	6,808	,552	,596

În urma analizei rezultatelor, se decide:

a) alegerea modelului pătratic
b) alegerea modelului cubic fără constantă
c) alegerea modelului cubic cu constantă
d) că nici un model nu este semnificativ
e) că se poate alege oricare dintre cele două modele

9. Pentru o serie de timp se emit două ipoteze cu privire la forma trendului. Una dintre ipoteze susține că seria de timp a evoluat după un trend cubic, iar cealaltă ipoteză susține că seria de timp a evoluat după un trend parabolic. Rezultatele prelucrării datelor, cu ajutorul SPSS, sunt prezentate în tabelele de mai jos:

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

MODELUL PĂRABOLIC

Model Summary

R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
,992	,983	,980	28,366

ANOVA

	Mean Square	F	Sig.
Regression	213065,381	264,806	,000
Residual	804,610		
Total			

Coefficients

	Unstd. Coeff. B	t	Sig.
Case Sequence	-42,129	-4,063	,003
Case Sequence**2	7,095	9,137	,000
(Constant)	111,295	3,796	,004

MODELUL CUBIC

Model Summary(a)

R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1,000	1,000	,999	7,240

A The equation was estimated without the constant term.

ANOVA(a)

	Mean Square	F	Sig.
Regression	340992,428	6505,869	,000
Residual	52,413		
Total			

a The equation was estimated without the constant term.

Coefficients

	Unstd. Coeff. B	t	Sig.
Case Sequence	42,658	14,872	,000
Case Sequence ** 2	-8,474	-11,852	,000
Case Sequence ** 3	,795	18,719	,000

În urma analizei rezultatelor, se poate considera că:

a) se alege modelul parabolic
b) se alege modelul cubic
c) nici un model nu este semnificativ
d) se poate alege oricare dintre cele două modele

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Răspunsuri la testele grilă

Număr test	Răspuns corect
1	a
2	b
3	a
4	b
5	a, c
6	b
7	b
8	c
9	b

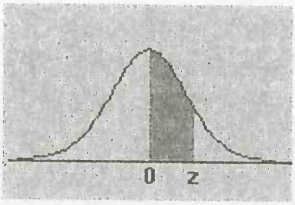
BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Tabele probabiliste

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

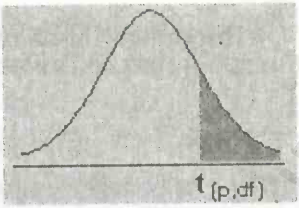
Valorile funcției Laplace



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

BCU

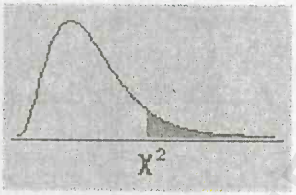
Repartiția Student



df\p	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
n>30	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Repartiția Chi-pătrat



df\area	.100	.050	.025	.010	.005
1	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	9,236	11,071	12,833	15,086	16,750
6	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
25	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

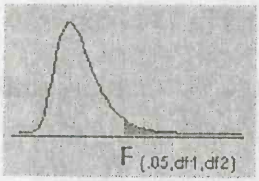
Repartiția Durbin-Watson

$\alpha = 0{,}05$ — k reprezintă numărul de parametri din model

n	$k=2$		$k=3$		$k=4$		$k=5$		$k=6$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1.077	1.361	0.945	1.543	0.814	1.750	0.685	1.977	0.562	2.220
16	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157
17	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104
18	1.158	1.392	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060
19	1.180	1.401	1.075	1.535	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.022
20	1.201	1.411	1.100	1.537	0.998	1.676	0.894	1.828	0.792	1.991
21	1.221	1.420	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.828	1.964
22	1.240	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.940
23	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.660	0.986	1.786	0.895	1.919
24	1.273	1.446	1.188	1.546	1.101	1.657	1.013	1.775	0.925	1.902
25	1.288	1.454	1.206	1.550	1.123	1.654	1.038	1.767	0.953	1.886
26	1.302	1.461	1.224	1.553	1.143	1.652	1.062	1.759	0.979	1.873
27	1.316	1.468	1.240	1.556	1.162	1.651	1.083	1.753	1.004	1.861
28	1.328	1.476	1.255	1.560	1.181	1.650	1.104	1.747	1.028	1.850
29	1.341	1.483	1.270	1.563	1.198	1.650	1.124	1.743	1.050	1.841
30	1.352	1.489	1.284	1.567	1.214	1.650	1.143	1.739	1.070	1.833
31	1.363	1.496	1.297	1.570	1.229	1.650	1.160	1.735	1.090	1.825
32	1.373	1.502	1.309	1.573	1.244	1.650	1.177	1.732	1.109	1.819
33	1.383	1.508	1.321	1.577	1.258	1.651	1.193	1.730	1.127	1.813
34	1.393	1.514	1.332	1.580	1.271	1.652	1.208	1.728	1.144	1.807
35	1.402	1.519	1.343	1.584	1.283	1.653	1.222	1.726	1.160	1.803
36	1.411	1.524	1.354	1.587	1.295	1.654	1.236	1.725	1.175	1.799
37	1.419	1.530	1.364	1.590	1.307	1.655	1.249	1.723	1.190	1.795
38	1.427	1.535	1.373	1.594	1.317	1.656	1.261	1.723	1.204	1.792
39	1.435	1.540	1.382	1.597	1.328	1.658	1.273	1.722	1.218	1.789
40	1.442	1.544	1.391	1.600	1.338	1.659	1.285	1.721	1.231	1.786
45	1.475	1.566	1.430	1.615	1.383	1.666	1.336	1.720	1.287	1.776
50	1.503	1.585	1.462	1.628	1.421	1.674	1.378	1.721	1.334	1.771
55	1.527	1.601	1.490	1.640	1.452	1.681	1.414	1.724	1.374	1.768
60	1.549	1.616	1.514	1.652	1.480	1.689	1.444	1.727	1.408	1.767
65	1.567	1.629	1.536	1.662	1.503	1.696	1.471	1.731	1.438	1.767
70	1.583	1.641	1.554	1.671	1.524	1.703	1.494	1.735	1.464	1.768
75	1.598	1.652	1.571	1.680	1.543	1.709	1.515	1.739	1.486	1.770
80	1.611	1.662	1.586	1.688	1.560	1.715	1.534	1.743	1.507	1.772
85	1.624	1.671	1.600	1.696	1.575	1.721	1.551	1.747	1.525	1.774
90	1.635	1.679	1.612	1.703	1.589	1.726	1.566	1.751	1.542	1.776
95	1.645	1.687	1.623	1.709	1.602	1.732	1.579	1.755	1.557	1.778
100	1.654	1.694	1.634	1.715	1.613	1.736	1.592	1.758	1.571	1.780

BCU "MIHAIL KOGĂLNICEANU" LIBRARY

Repartiția Fisher

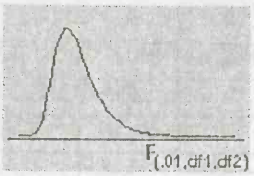


df2/df1	1	2	3	4	5	6	7
1	161,448	199,500	215,707	224,583	230,162	233,986	236,768
2	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,330	19,353
3	10,128	9,552	9,277	9,117	9,014	8,941	8,887
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,094
5	6,608	5,786	5,410	5,192	5,050	4,950	4,876
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,207
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,787
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,688	3,581	3,501
9	5,117	4,257	3,863	3,633	3,482	3,374	3,293
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,136
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	3,012
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,913
13	4,667	3,806	3,411	3,179	3,025	2,915	2,832
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,764
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,791	2,707
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,657
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,614
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,577
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,544
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,514
21	4,325	3,467	3,073	2,840	2,685	2,573	2,488
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,464
23	4,279	3,422	3,028	2,796	2,640	2,528	2,442
24	4,260	3,403	3,009	2,776	2,621	2,508	2,423
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,405
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,388
27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,373
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,359
29	4,183	3,328	2,934	2,701	2,545	2,432	2,346
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,334
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,450	2,336	2,249
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,167
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,087
n>120	3,842	2,996	2,605	2,372	2,214	2,099	2,010

df2/df1	8	9	10	20	30	120	INF
1	238,883	240,543	241,882	248,013	250,095	253,253	254,314
2	19,371	19,385	19,396	19,446	19,462	19,487	19,496
3	8,845	8,812	8,786	8,660	8,617	8,549	8,526
4	6,041	5,999	5,964	5,803	5,746	5,658	5,628
5	4,818	4,773	4,735	4,558	4,496	4,399	4,365
6	4,147	4,099	4,060	3,874	3,808	3,705	3,669
7	3,726	3,677	3,637	3,445	3,376	3,267	3,230
8	3,438	3,388	3,347	3,150	3,079	2,967	2,928
9	3,230	3,179	3,137	2,937	2,864	2,748	2,707
10	3,072	3,020	2,978	2,774	2,700	2,580	2,538
11	2,948	2,896	2,854	2,646	2,571	2,448	2,405
12	2,849	2,796	2,753	2,544	2,466	2,341	2,296
13	2,767	2,714	2,671	2,459	2,380	2,252	2,206
14	2,699	2,646	2,602	2,388	2,308	2,178	2,131
15	2,641	2,588	2,544	2,328	2,247	2,114	2,066
16	2,591	2,538	2,494	2,276	2,194	2,059	2,010
17	2,548	2,494	2,450	2,230	2,148	2,011	1,960
18	2,510	2,456	2,412	2,191	2,107	1,968	1,917
19	2,477	2,423	2,378	2,156	2,071	1,930	1,878
20	2,447	2,393	2,348	2,124	2,039	1,896	1,843
21	2,421	2,366	2,321	2,096	2,010	1,866	1,812
22	2,397	2,342	2,297	2,071	1,984	1,838	1,783
23	2,375	2,320	2,275	2,048	1,961	1,813	1,757
24	2,355	2,300	2,255	2,027	1,939	1,790	1,733
25	2,337	2,282	2,237	2,008	1,919	1,768	1,711
26	2,321	2,266	2,220	1,990	1,901	1,749	1,691
27	2,305	2,250	2,204	1,974	1,884	1,731	1,672
28	2,291	2,236	2,190	1,959	1,869	1,714	1,654
29	2,278	2,223	2,177	1,945	1,854	1,698	1,638
30	2,266	2,211	2,165	1,932	1,841	1,684	1,622
40	2,180	2,124	2,077	1,839	1,744	1,577	1,509
60	2,097	2,040	1,993	1,748	1,649	1,467	1,389
120	2,016	1,959	1,911	1,659	1,554	1,352	1,254
n>120	1,938	1,880	1,831	1,571	1,459	1,221	1,000

BCU BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITY LIBRARY

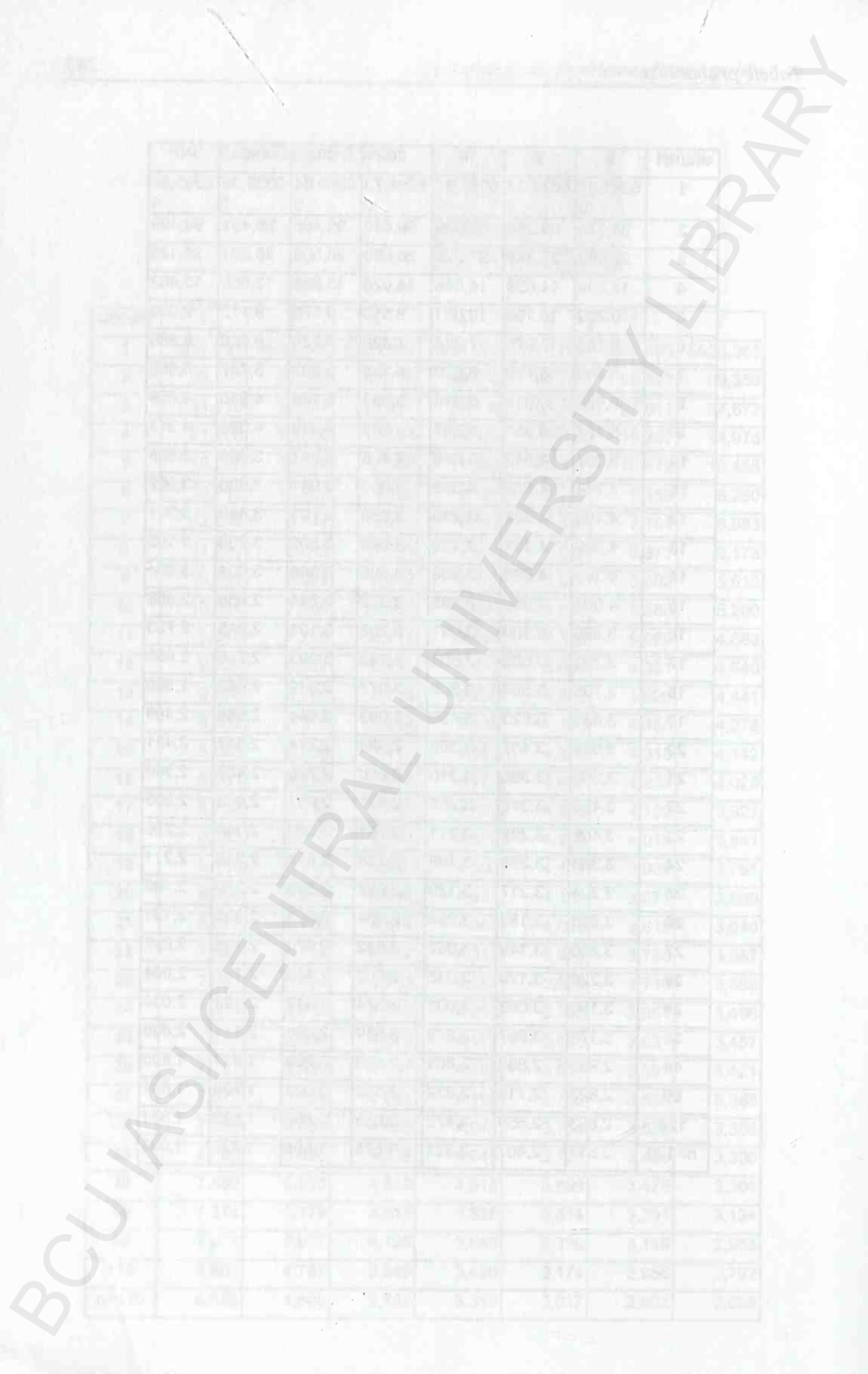
Repartiția Fisher



df2/df1	1	2	3	4	5	6	7
1	4052,181	4999,500	5403,352	5624,583	5763,650	5858,986	5928,356
2	98,503	99,000	99,166	99,249	99,299	99,333	99,356
3	34,116	30,817	29,457	28,710	28,237	27,911	27,672
4	21,198	18,000	16,694	15,977	15,522	15,207	14,976
5	16,258	13,274	12,060	11,392	10,967	10,672	10,456
6	13,745	10,925	9,780	9,148	8,746	8,466	8,260
7	12,246	9,547	8,451	7,847	7,460	7,191	6,993
8	11,259	8,649	7,591	7,006	6,632	6,371	6,178
9	10,561	8,022	6,992	6,422	6,057	5,802	5,613
10	10,044	7,559	6,552	5,994	5,636	5,386	5,200
11	9,646	7,206	6,217	5,668	5,316	5,069	4,886
12	9,330	6,927	5,953	5,412	5,064	4,821	4,640
13	9,074	6,701	5,739	5,205	4,862	4,620	4,441
14	8,862	6,515	5,564	5,035	4,695	4,456	4,278
15	8,683	6,359	5,417	4,893	4,556	4,318	4,142
16	8,531	6,226	5,292	4,773	4,437	4,202	4,026
17	8,400	6,112	5,185	4,669	4,336	4,102	3,927
18	8,285	6,013	5,092	4,579	4,248	4,015	3,841
19	8,185	5,926	5,010	4,500	4,171	3,939	3,765
20	8,096	5,849	4,938	4,431	4,103	3,871	3,699
21	8,017	5,780	4,874	4,369	4,042	3,812	3,640
22	7,945	5,719	4,817	4,313	3,988	3,758	3,587
23	7,881	5,664	4,765	4,264	3,939	3,710	3,539
24	7,823	5,614	4,718	4,218	3,895	3,667	3,496
25	7,770	5,568	4,675	4,177	3,855	3,627	3,457
26	7,721	5,526	4,637	4,140	3,818	3,591	3,421
27	7,677	5,488	4,601	4,106	3,785	3,558	3,388
28	7,636	5,453	4,568	4,074	3,754	3,528	3,358
29	7,598	5,420	4,538	4,045	3,725	3,499	3,330
30	7,562	5,390	4,510	4,018	3,699	3,473	3,304
40	7,314	5,179	4,313	3,828	3,514	3,291	3,124
60	7,077	4,977	4,126	3,649	3,339	3,119	2,953
120	6,851	4,787	3,949	3,480	3,174	2,956	2,792
n>120	6,635	4,605	3,782	3,319	3,017	2,802	2,639

df2/df1	8	9	.10	20	30	120	INF
1	5981,070	6022,473	6055,847	6208,730	6260,649	6339,391	6365,864
2	99,374	99,388	99,399	99,449	99,466	99,491	99,499
3	27,489	27,345	27,229	26,690	26,505	26,221	26,125
4	14,799	14,659	14,546	14,020	13,838	13,558	13,463
5	10,289	10,158	10,051	9,553	9,379	9,112	9,020
6	8,102	7,976	7,874	7,396	7,229	6,969	6,880
7	6,840	6,719	6,620	6,155	5,992	5,737	5,650
8	6,029	5,911	5,814	5,359	5,198	4,946	4,859
9	5,467	5,351	5,257	4,808	4,649	4,398	4,311
10	5,057	4,942	4,849	4,405	4,247	3,996	3,909
11	4,744	4,632	4,539	4,099	3,941	3,690	3,602
12	4,499	4,388	4,296	3,858	3,701	3,449	3,361
13	4,302	4,191	4,100	3,665	3,507	3,255	3,165
14	4,140	4,030	3,939	3,505	3,348	3,094	3,004
15	4,004	3,895	3,805	3,372	3,214	2,959	2,868
16	3,890	3,780	3,691	3,259	3,101	2,845	2,753
17	3,791	3,682	3,593	3,162	3,003	2,746	2,653
18	3,705	3,597	3,508	3,077	2,919	2,660	2,566
19	3,631	3,523	3,434	3,003	2,844	2,584	2,489
20	3,564	3,457	3,368	2,938	2,778	2,517	2,421
21	3,506	3,398	3,310	2,880	2,720	2,457	2,360
22	3,453	3,346	3,258	2,827	2,667	2,403	2,305
23	3,406	3,299	3,211	2,781	2,620	2,354	2,256
24	3,363	3,256	3,168	2,738	2,577	2,310	2,211
25	3,324	3,217	3,129	2,699	2,538	2,270	2,169
26	3,288	3,182	3,094	2,664	2,503	2,233	2,131
27	3,256	3,149	3,062	2,632	2,470	2,198	2,097
28	3,226	3,120	3,032	2,602	2,440	2,167	2,064
29	3,198	3,092	3,005	2,574	2,412	2,138	2,034
30	3,173	3,067	2,979	2,549	2,386	2,111	2,006
40	2,993	2,888	2,801	2,369	2,203	1,917	1,805
60	2,823	2,718	2,632	2,198	2,028	1,726	1,601
120	2,663	2,559	2,472	2,035	1,860	1,533	1,381
n>120	2,511	2,407	2,321	1,878	1,696	1,325	1,000

BCU BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITY LIBRARY


BCU IAS/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Bibliografie

1. Anderson, O.D., *Time series analysis and forecasting,* Butterworths, 1976
2. Andrei, T., Bourbonnais, R., *Econometrie*, Editura Economica, Bucureşti, 2008.
3. Andrei, T., *Statistică şi econometrie*, Editura Economica, Bucureşti, 2003.
4. Berdot, J.P., *Économétrie,* CNED, Poitiers-Futurscope, 2001
5. Bourbonnais, R., *Économétrie,* Dunod, Paris, 2000
6. Box, G.E., Jenkins, G.M., *Time series analysis,* Holden Day, San Francisco, 1970
7. Chow, G., *Econometrics,* MacGraw-Hill, New York, 1989
8. Eatwell, J., Newman, P., *Times series and statistics*, W.W. Norton, New York, 1996
9. Fisher, R.A., *Les méthodes statistiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1947

BCU ASE CENTRAL - UNIVERSITY LIBRARY

10. Fuller, W.A., *Introduction to Statistical Time Series,* John Wiley & Sons, New York, 1976
11. Galton, F., *Family Likeness in Stature,* Proceedings of Royal Society, London, vol. 40, 1886
12. Gourieroux, C., Monfort, A., *Statistique et modéles économétriques*, Economica, Paris, 1989, 2 vol.
13. Greene, W.H., *Econometric analysis,* Mac Millan, 1993
14. Goldfeld, S.M., Quandt, R.E., *Non linear methods in econometrics,* North-Holland, Amsterdam, 1972
15. Gujarati, D.N., *Basic econometrics*, McGraw-Hill, New York, 1995
16. Hamilton, J.D., *Time series analysis,* Princeton University Press, 1994
17. Jaba, E., *Statistica*, Ediția a treia, Editura Economică, Bucureşti, 2002
18. Jaba, E., Jemna, D.V., *Econometrie,* Editura Sedcom Libris, Iaşi, 2006
19. Jemna, D.V., *Eficiența sondajului statistic,* Editura Sedcom Libris, Iaşi, 2005
20. Jemna, D.V., *Econometrie,* Editura Universității „Al.I. Cuza" Iaşi, 2007
21. Johnston, J., *Econometric Methods,* MacGraw-Hill, New York, 1963
22. Johnston, J., Dinardo, J., *Méthodes économétriques*, Economica, Paris, 1997
23. Kmenta, J., *Elements of Econometrics,* MacMillan Publishing, 1986
24. Labrose, C., *Introduction à l'économétrie,* Dunod, Paris, 1976
25. Maddala, G.S., *Econometrics,* MacGraw-Hill, New York, 1978

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

26. Maddala, G.S., *Introduction to Econometrics,* John Wiley & Sons, 2001
27. Malinvaud, E., *Méthodes statistiques de l'économétrie,* Dunod, Paris, 1978
28. Mignon, V., *Econométrie. Théorie et applications,* Editura Economica, Paris, 2008.
29. Minium, E., Clarke, R., Coladarci, T., *Elements of Statistical Reasoning,* John Wiley and Sons, 1999.
30. Pecican, E.S., *Econometria,* All, Bucureşti, 1994
31. Pecican, E.S., *Econometria pentru economişti,* Editura Economică, Bucureşti, 2003
32. Pintilescu, C., *Analiză statistică multivariată,* Editura Universităţii „Al.I. Cuza" Iaşi, 2007
33. Spircu, L., Ciumara, R., *Econometrie*, Editura ProUniversitaria, Bucureşti, 2007.
34. Tassi, P., *Méthodes statistiques*, Economica, Paris, 1989
35. Turturean, C.I., *Metode statistice de analiză a seriilor de timp,* Editura Sedcom Libris, Iaşi, 2006
36. Wilthien, P.H., *Décision statistique et économétrie*, Armand Colin, Paris, 1996

BCU IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Culoarea este o pasiune, iar pasiunea se împarte...

tipografia

libris

TIPOGRAFIA SEDCOM LIBRIS
IAȘI, ROMÂNIA
ISO 9001:2000
Șos. Moara de Foc nr. 4,
cod 700572, Iași, România
Tel.: +40.232.234.582, 270.479, 242.877;
Fax.: +40.232.233.080
E-mail: tipografia@sedcom.ro
http:// www.sedcom.ro

Bun de tipar: octombrie 2009

Pentru că ne pasă cine ești, ce faci, cum faci și unde vrei să ajungi...

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2009/14

10

Econometria este o disciplină metodologică şi cu un caracter puternic aplicativ. Construirea modelelor econometrice presupune cunoaşterea teoriei economice care explică mecanismele de realizare a fenomenelor studiate, precum şi a metodelor şi modelelor matematice care permit instrumentarea relaţiei dintre fenomene. Pentru a atinge obiectivul principal al econometriei, este foarte important să se cunoască paşii unui demers al cercetării şi problemele pe care le ridică fiecare etapă a procesului de modelare, de la alegerea variabilelor şi până la testarea modelului construit.

Lucrarea de faţă vine în întâmpinarea unei asemenea nevoi de ordin metodologic şi are un caracter didactic. Sunt puse la dispoziţia cititorului o serie de aplicaţii punctuale care concordă cu probleme punctuale din demersul modelării econometrice, aşa cum sunt, de exemplu: analiza grafică a seriilor empirice de date, identificarea unui model de regresie, estimarea parametrilor, testarea parametrilor modelului, analiza de corelaţie, testarea ipotezelor modelului clasic de regresie etc. Alături de aplicaţii, în lucrare, sunt prezentate o serie de teste grilă care au rolul de a ajuta cititorul (ne referim aici, în special, la studenţi, dar nu numai) să-şi evalueze cunoştinţele de econometrie dobândite.

www.editurasedcomlibris.ro

editura sedcom libris

CARTEA ESTE O PASIUNE, IAR PASIUNEA SE ÎMPARTE...
acreditare C.N.C.S.I.S.
editare, traducere, tipărire,
propunere de publicare în străinătate,
promovare şi difuzare în întreaga ţară
PENTRU CĂ NE PASĂ CINE EŞTI, CE FACI, CUM FACI ŞI UNDE VREI SĂ AJUNGI...

I.S.B.N.: 978-973-670-344-7

9 789736 703447